

模糊逻辑推理

- 什么是推理
 - 推理是使用理智从某些前提产生结论的行动。
- 经典推理的模式
 - 演绎推理：给出正确前提就必然能推出结论（知识无扩展）。
 - 归纳推理：当前提为真时，可推出某结论（可扩展知识）。
 - 溯因推理：推论到最佳解释。

演绎推理的三段论

- 由规则和知识推理结论的过程

例：

- 规则：人皆有一死
 - 知识：苏格拉底是人
 - 结论：苏格拉底会死
- 特点：知识满足规则与否是确定的，因此结论也是确定的

模糊知识的演绎推理

例：

- 规则：胖人得心脑血管疾病的可能性大
- 知识：某某人很胖（较胖、不胖）
- 结论：某某人得心脑血管疾病的可能性？
- 特点：知识满足规则与否是模糊的，应以程度表述，因此结论也是模糊的，应以程度表述。

模糊推理

- 问题的描述：

规则：IF $X=A$ THEN $Y=B$

知识： $X=A'$

待求： $Y=B'=?$

这里 X 、 Y 分别为输入和输出论域的变量， A, A', B, B' 都是模糊集合。

模糊推理

- 模糊推理问题的解决思路
 - 第 1 步 . 将已知的规则归纳为前因与结果两论域间的模糊关系。
 - 第 2 步 . 将前因论域的现有知识与归纳得到的模糊关系进行合成运算 , 推出当前知识下的结论。

模糊推理

由规则得到模糊关系的常用方法

规则：IF $X=A$ THEN $Y=B$

Mamdani 方法 (最小运算)

$$R_C = A \rightarrow B = A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x) \cap \mu_B(y) / (x, y)$$

Larsen 方法 (乘积运算)

$$R_P = A \rightarrow B = A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) / (x, y)$$

模糊推理

模糊结论的获得

规则：IF $X=A$ THEN $Y=B$

知识： $X=A'$

待求： $Y=B'=A' \circ (A \rightarrow B) = A' \circ R$

Mamdani 方法 (最小运算)

$$B' = A' \circ R = \int_X \mu_{A'}(x) / x \circ \int_{X \times Y} \mu_A(x) \cap \mu_B(y) / (x, y)$$

Larsen 方法 (乘积运算)

$$B' = A' \circ R = \int_X \mu_{A'}(x) / x \circ \int_{X \times Y} \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) / (x, y)$$

模糊推理

合成运算方法的选择

最大 - 最小合成法 (Zadeh)

$$\mu_{B'}(y) = \bigcup_{x \in X} [\mu_{A'}(x) \cap \mu_R(x, y)]$$

最大 - 代数积合成法
(Kaufmann)

$$\mu_{B'}(y) = \bigcup_{x \in X} [\mu_{A'}(x) \cdot \mu_R(x, y)]$$

模糊推理

举例：若人工调节炉温，有如下经验规则：“如果炉温低，则应施加高电压”。试问当炉温为“低”、“非常低”，“略低”，“不低”时，应施加怎样的电压？

设 x 和 y 分别表示模糊语言变量“炉温”和“电压”，并设 x 和 y 的论域为：

$$X=Y=\{1,2,3,4,5\}$$

设 A 为表示炉温低的模糊集合

$$A=1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5$$

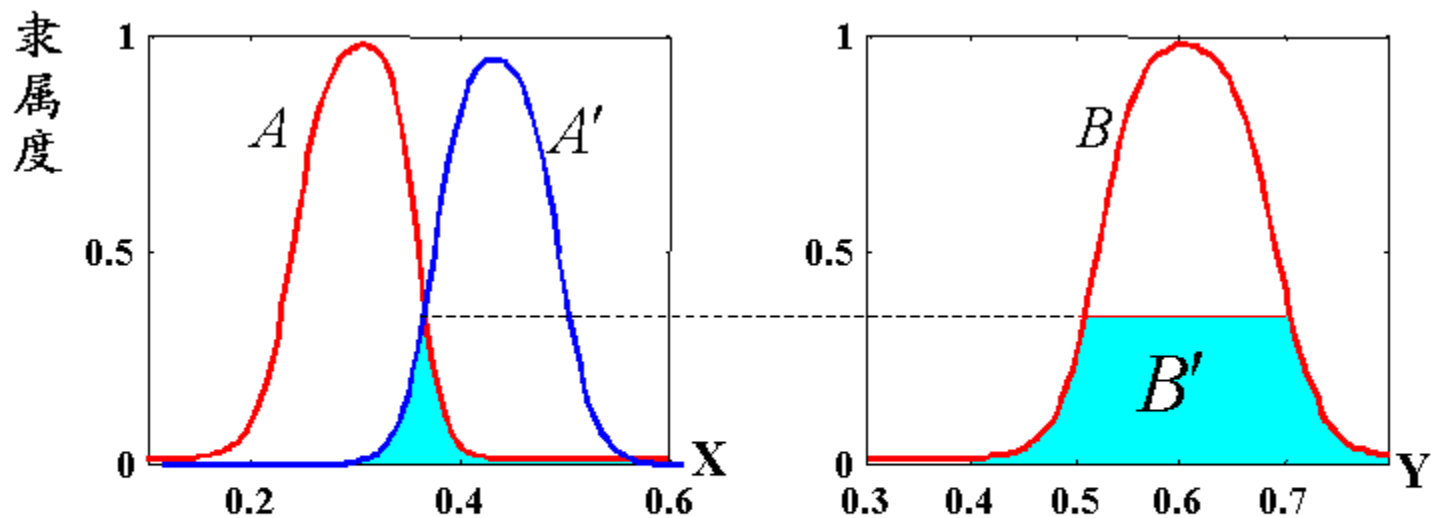
设 B 为表示电压高的模糊集合

$$B=0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.8/4+1/5$$

模糊推理

1. 单个前提单个规

前提1(事实)	x 是 A'
前提2(规则)	<i>if</i> x 是 A , <i>then</i> y 是 B
结果(结论)	y 是 B'



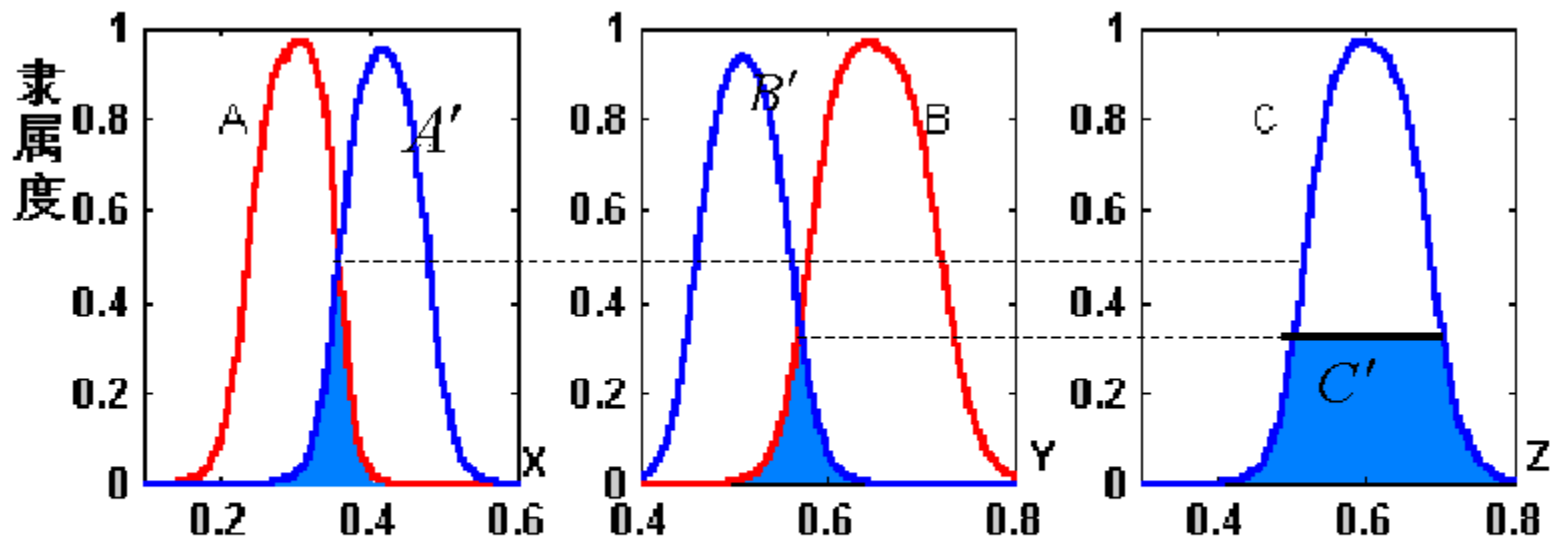
$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \bigvee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \\ &= [\bigvee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x))] \wedge \mu_B(y) \\ &= \omega \wedge \mu_B(y) \quad (\text{max-min 复合运算})\end{aligned}$$

2. 多前提单规则

前提1 (事实) x 是 A' , y 是 B'

前提2 (规则) *if* x 是 A 和 y 是 B , *then* Z 是 C

结果 (结论) z 是 C'



隶属函数的计算

$$\begin{aligned}\mu_{C'}(z) &= \bigvee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \\ &= \bigvee_{x,y} [(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y))] \wedge \mu_C(z) \\ &= \left\{ \bigvee_x [(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x))] \right\} \wedge \left\{ \bigvee_y [\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)] \right\} \wedge \mu_C(z) \\ &= (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \mu_c(z)\end{aligned}$$

3) 多前提多规则

前提1(事实)

x 是 A' , y 是 B'

前提2(规则)

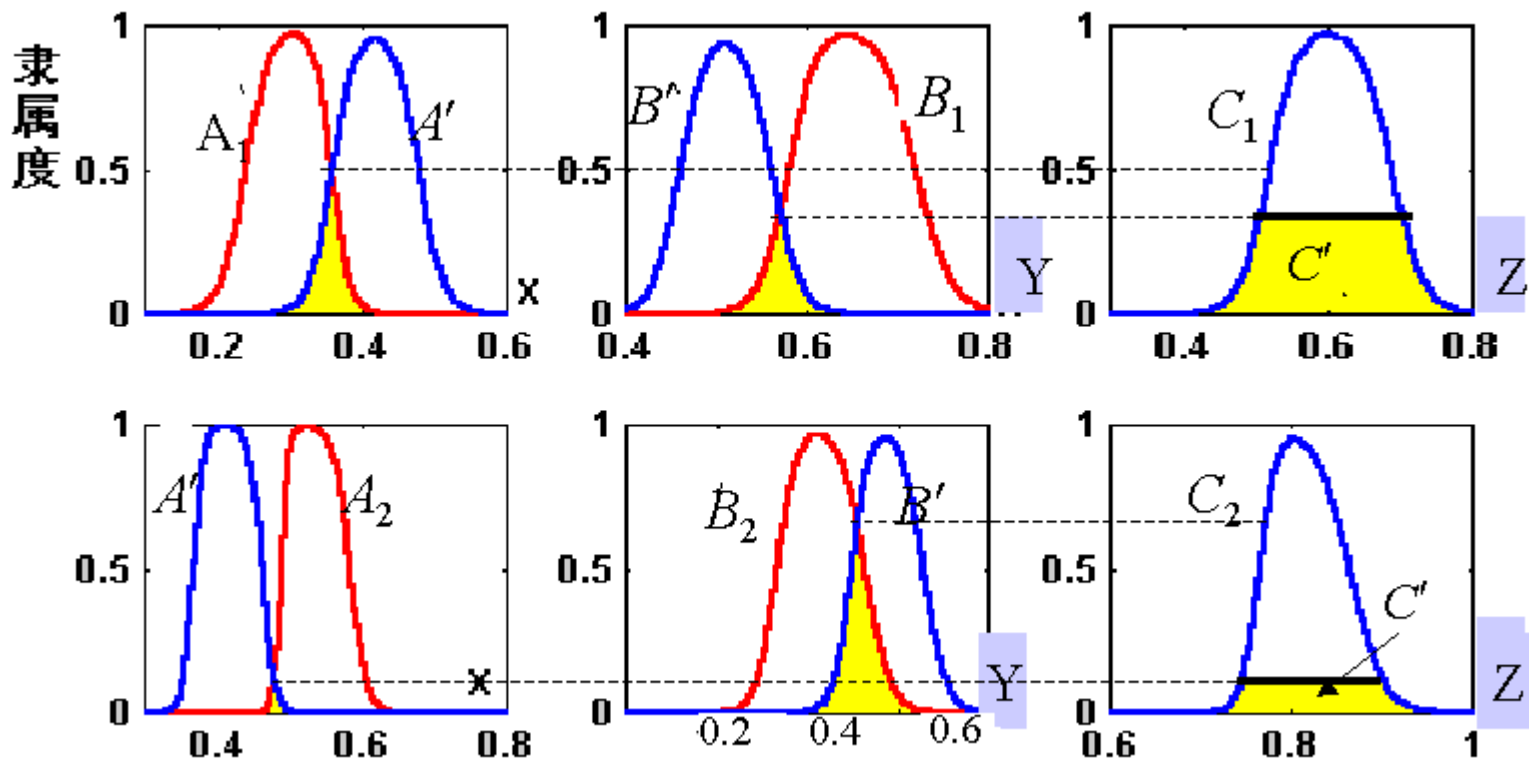
if x 是 A_1 和 y 是 B_1 , then Z 是 C_1

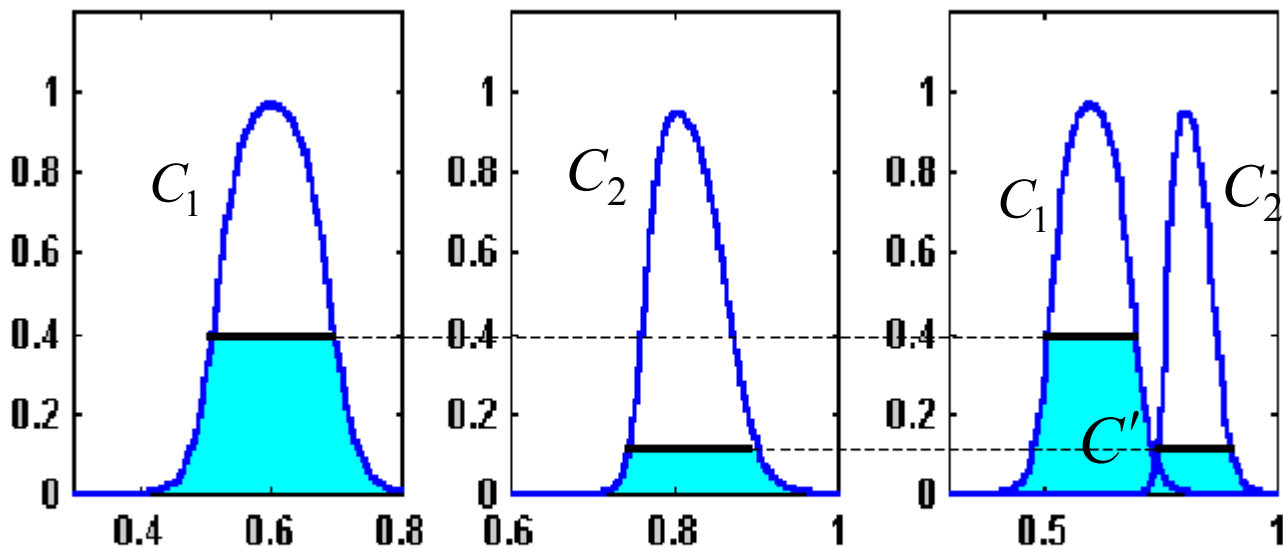
前提3(规则2)

if x 是 A_2 和 y 是 B_2 , then Z 是 C_2

结果(结论)

z 是 C'





隶属函数的计算

$$\begin{aligned}
 C' &= (A' \times B') \circ (R_1 \cup R_2) \\
 &= [(A' \times B') \circ R_1] \cup [(A' \times B') \circ R_2] \\
 &= C'_1 \cup C'_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{C'}(z) &= \left\{ \bigvee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y) \wedge \mu_{C_1}(z)] \right\} \vee \\
 &\quad \left\{ \bigvee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_2}(y) \wedge \mu_{C_2}(z)] \right\} \\
 &= \left\{ (\omega_{11} \wedge \omega_{12}) \wedge \mu_{C_1} \right\} \vee \left\{ (\omega_{21} \wedge \omega_{22}) \wedge \mu_{C_2} \right\}
 \end{aligned}$$

模糊推理

- 工程中实际的输入情况

工程应用中实际的输入（知识）是确定值，而不是模糊集合，这时的推理过程应是怎样的？

1. 单个前提单个规

前提1 (事实) x 是 x_0

前提2 (规则) *if* x 是 A , *then* y 是 B

结果 (结论) y 是 B'

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \bigvee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \\ &= [\bigvee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x))] \wedge \mu_B(y) \\ &= \mu_A(x_0) \wedge \mu_B(y) \quad (\text{max-min 复合运算})\end{aligned}$$

2. 多前提单规则

前提1 (事实) x 是 x_0, y 是 y_0

前提2 (规则) *if* x 是 A 和 y 是 $B, then Z$ 是 C

结果 (结论) z 是 C'

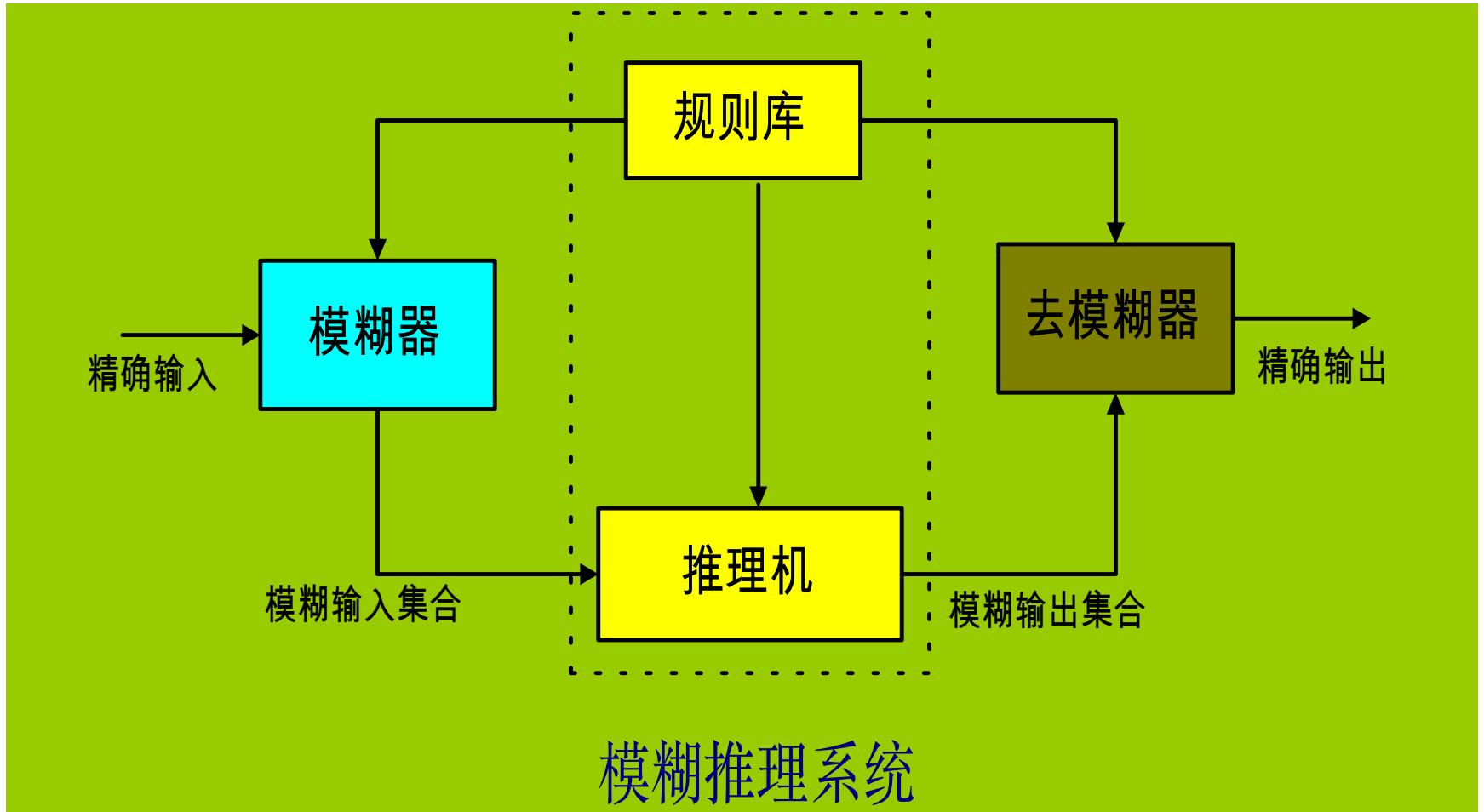
$$\begin{aligned}\mu_{C'}(z) &= \bigvee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \\ &= \bigvee_{x,y} [(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y))] \wedge \mu_C(z) \\ &= \left\{ \bigvee_x [(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x))] \right\} \wedge \left\{ \bigvee_y [\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)] \right\} \wedge \mu_C(z) \\ &= (\mu_A(x_0) \wedge \mu_B(y_0)) \wedge \mu_C(z)\end{aligned}$$

3) 多前提多规则

前提1 (事实)	x 是 x_0 , y 是 y_0
前提2 (规则1)	if x 是 A_1 和 y 是 B_1 , then Z 是 C_1
前提3 (规则2)	if x 是 A_2 和 y 是 B_2 , then Z 是 C_2
结果 (结论)	z 是 C'

$$\begin{aligned}\mu_{C'}(z) &= \left\{ \bigvee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y) \wedge \mu_{C_1}(z)] \right\} \vee \\ &\quad \left\{ \bigvee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_2}(y) \wedge \mu_{C_2}(z)] \right\} \\ &= \left\{ \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \right\} \wedge \mu_{C_1} \vee \left\{ \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0) \right\} \wedge \mu_{C_2}\end{aligned}$$

模糊推理系统



1) 模糊化和模糊器

★单点模糊化

输入模糊集合 A' 是单点模糊器，

即： $x = x'$ 时， $\mu_{A'}(x') = 1$ ； $x \neq x'$ 时， $\mu_{A'}(x') = 0$ 。

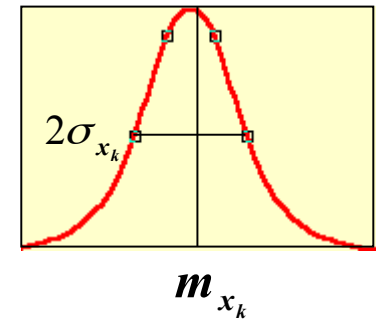
$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A \rightarrow B}(x = x', y)$$

★非单点模糊化

输入模糊集合 A' 是非单点模糊器，

即： $x = x'$ 时， $\mu_{A'}(x') = 1$ ； $x \neq x'$ 时， $\mu_{A'}(x') \neq 0$ ；

随 x 的变化（偏离 x' ）， $\mu_{A'}(x')$ 逐渐减小。



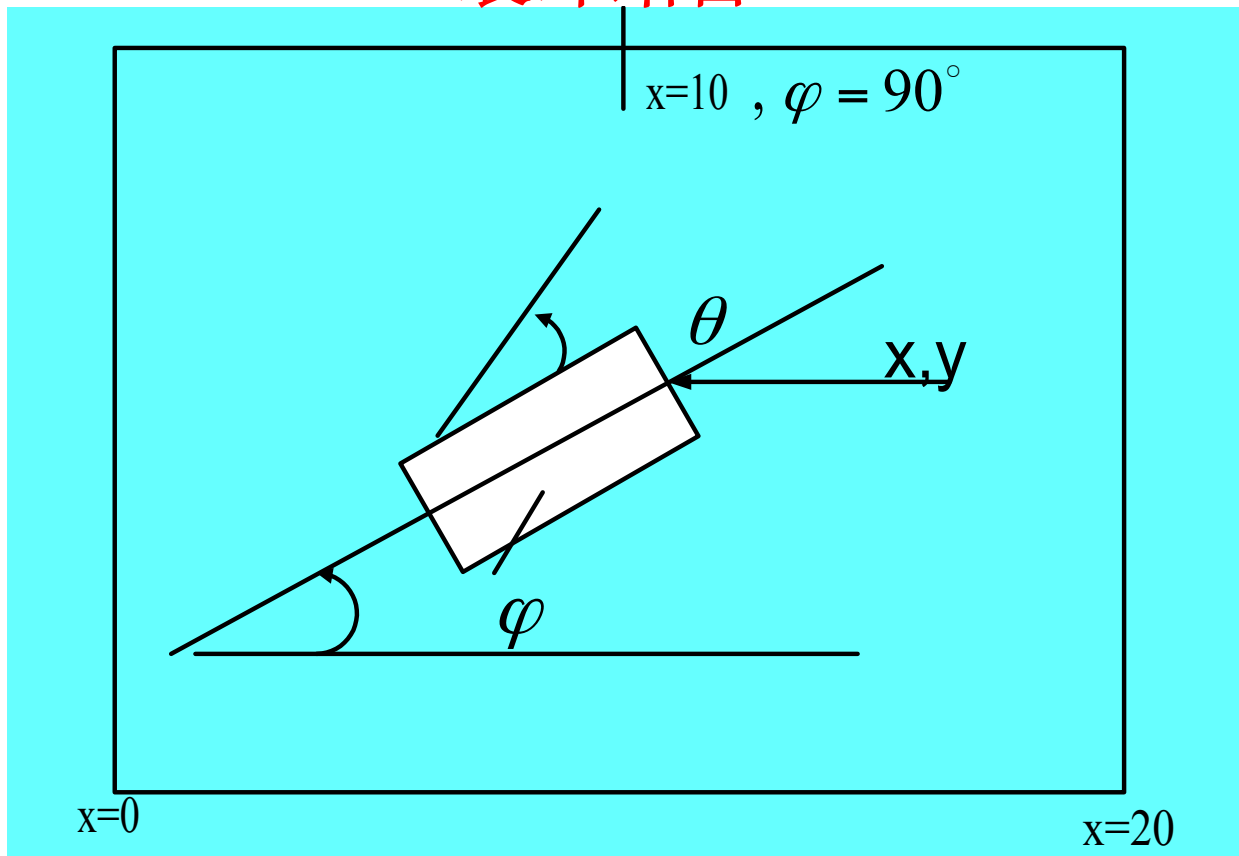
2. 规则库

一般情况下，规则 R^l 可以表示如下：

R^l : if u_1 是 A_1^l , u_2 是 A_2^l , \dots , u_p 是 A_p^l , then v 是 G^l

举例：货车倒车

装卸站台



$$\varphi \in [-90^\circ, 270^\circ]$$

$$\theta \in [-40^\circ, 40^\circ]$$

$$x \in [0, 20]$$

货车终点位置

$$(x_f, \varphi_f) = (10, 90)$$

规则：

$R^{(1,2)}$: if φ 是 S_3 和 x 是 S_1 ,
then θ 是 S_3 ;

$R^{(3,5)}$: if φ 是 S_1 和 x 是 B_2 ,
then θ 是 S_2 ;

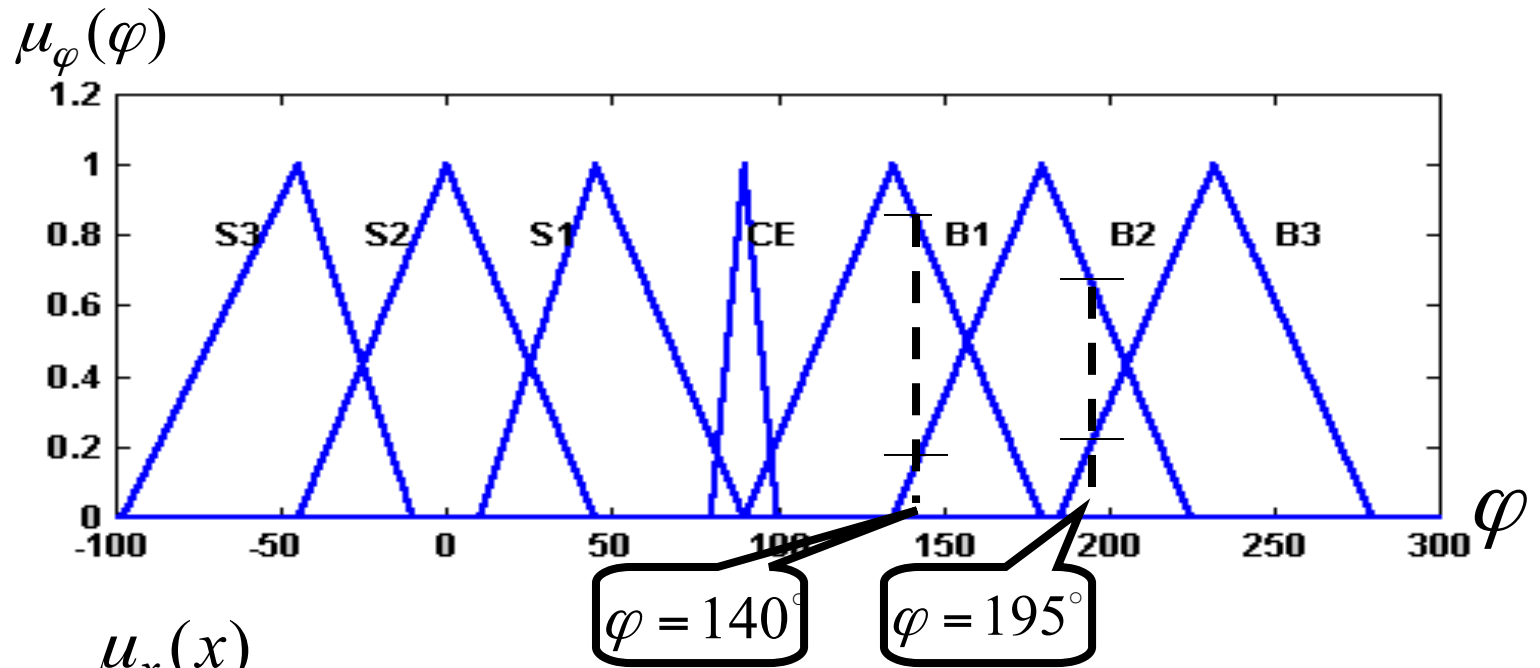
$R^{(4,3)}$: if φ 是 CE 和 x 是 CE ,
then θ 是 CE ;

.....

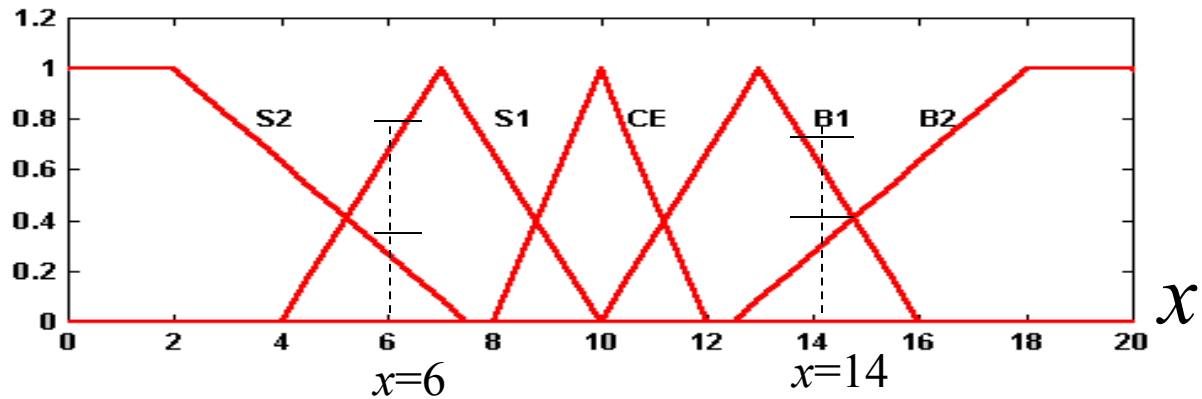
$R^{(7,5)}$: if φ 是 B_3 和 x 是 B_2 ,
then θ 是 B_2 ;

S_3	S_2	S_3			
S_2	S_2	S_3	S_3	S_3	
S_1	B_1	S_1	S_2	S_3	S_2
φ CE	B_2	B_2	CE	S_2	S_2
B_1	B_2	B_3	B_2	B_1	S_1
B_2		B_3	B_3	B_3	B_2
B_3				B_3	B_2
	S_2	S_1	CE	B_1	B_2
			x		

S_1 S_2 S_3 CE B_1 B_2 B_3
 小小 小中小大 零大小大 中大大



$\mu_x(x)$



3. 推理机

首先求取规则隐含的模糊关系

$$\mu_{R^l}(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y), \quad x = (x_1, \dots, x_p)^T$$

$$\mu_{R^l}(x, y) = \mu_{R^l}(x_1, \dots, x_p, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x_1, \dots, x_p, y)$$

$$\therefore \mu_{R^l}(x, y) = \mu_{A_1}^l(x_1) * \dots * \mu_{A_2}^l(x_p) * \mu_{G^l}$$

输入的模糊集合

$$\mu_{A_X}(x) = \mu_{x_1}(x) * \cdots * \mu_{x_p}(x), \quad x \in X$$

每条规则的输出：

$$B^l = A_x \circ R^l$$

$$\mu_{B^l}(y) = \mu_{A_x \circ R^l}(y)$$

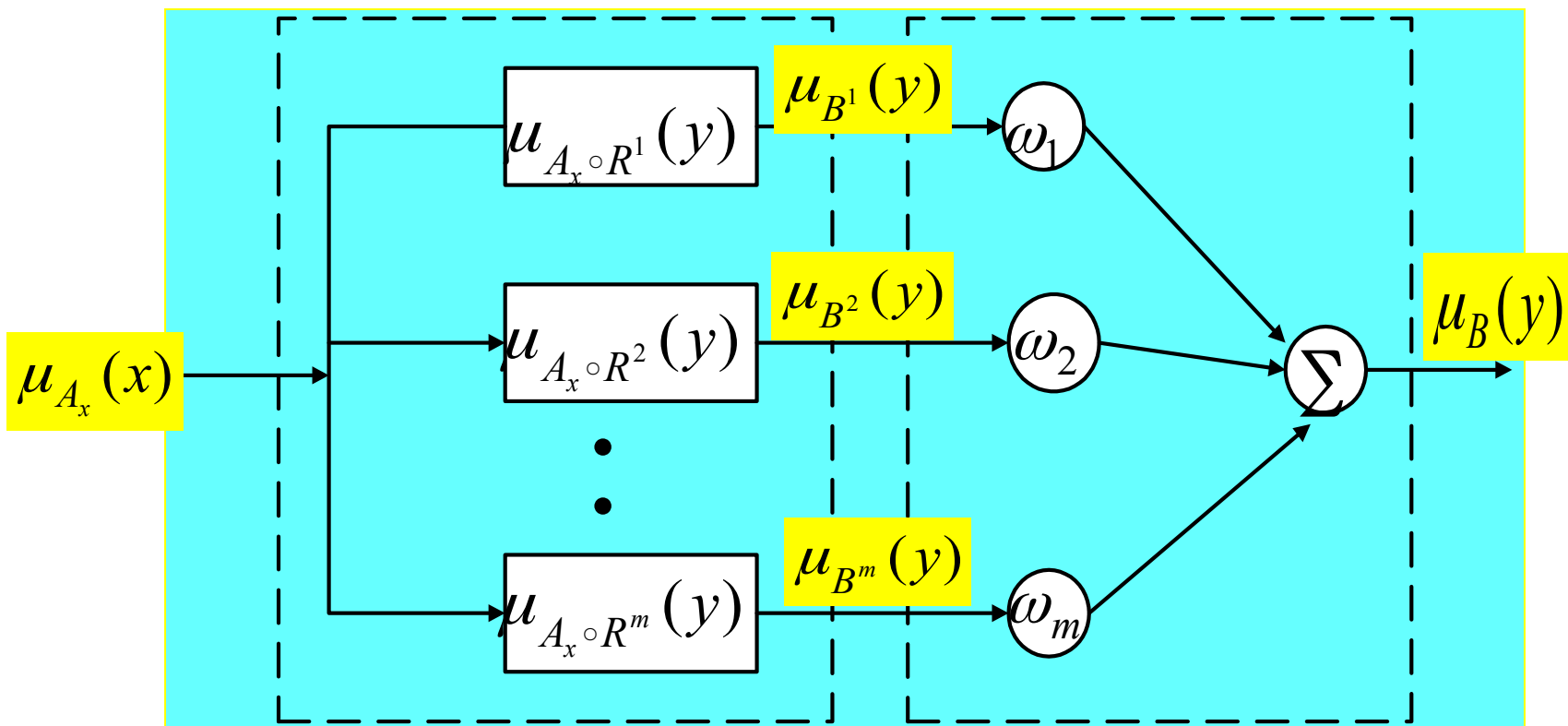
$$= \sup_{x \in A_x} [\mu_{A_x}(x) * \mu_{A \rightarrow B}(x, y)], \quad l = 1, 2, \cdots, m.$$

对所有规则，

$$B = A_X \circ [R^1, R^2, \cdots, R^m] = \bigcup_{i=1}^m A_X \circ R^i$$

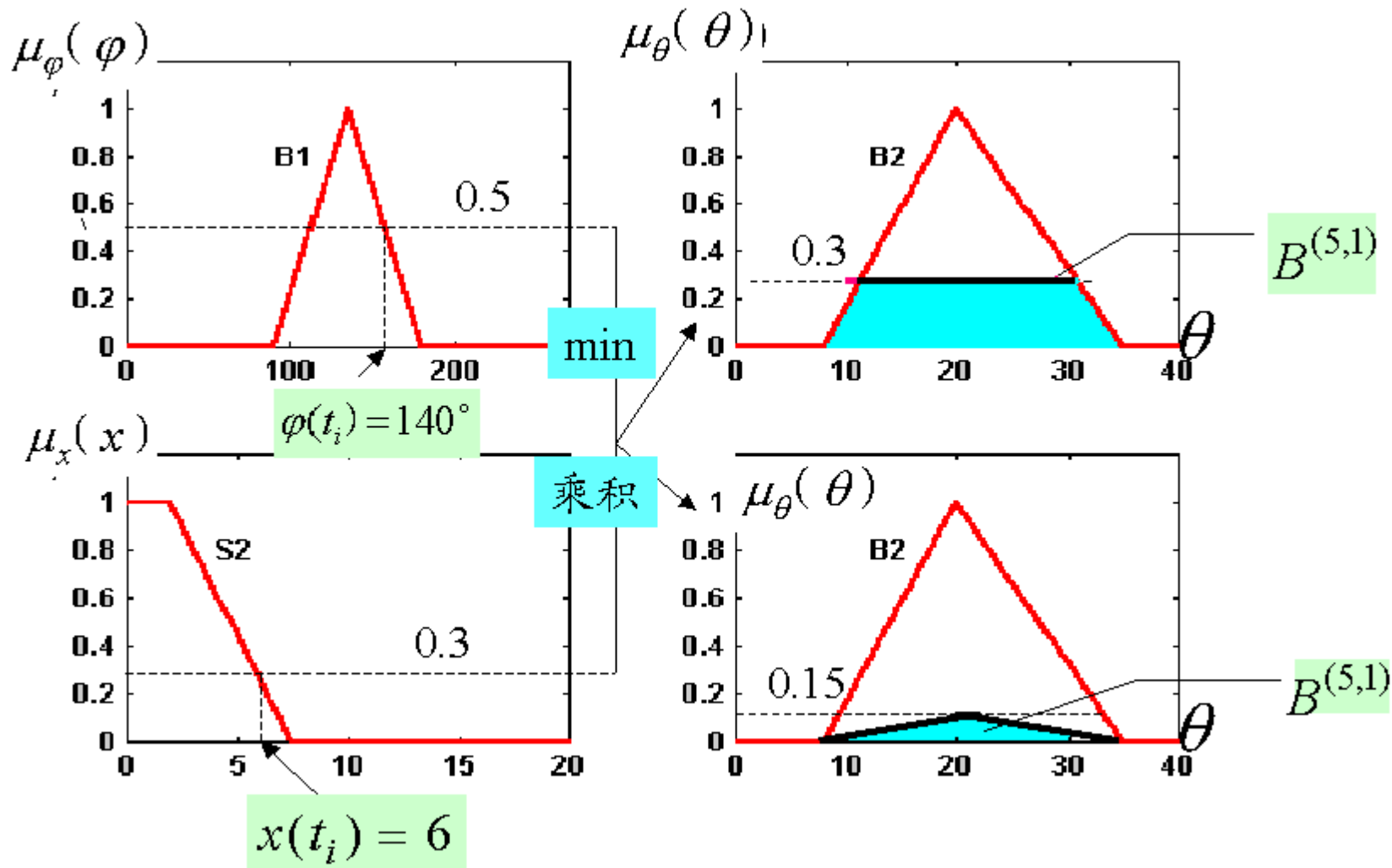
模糊预滤波

自适应滤波

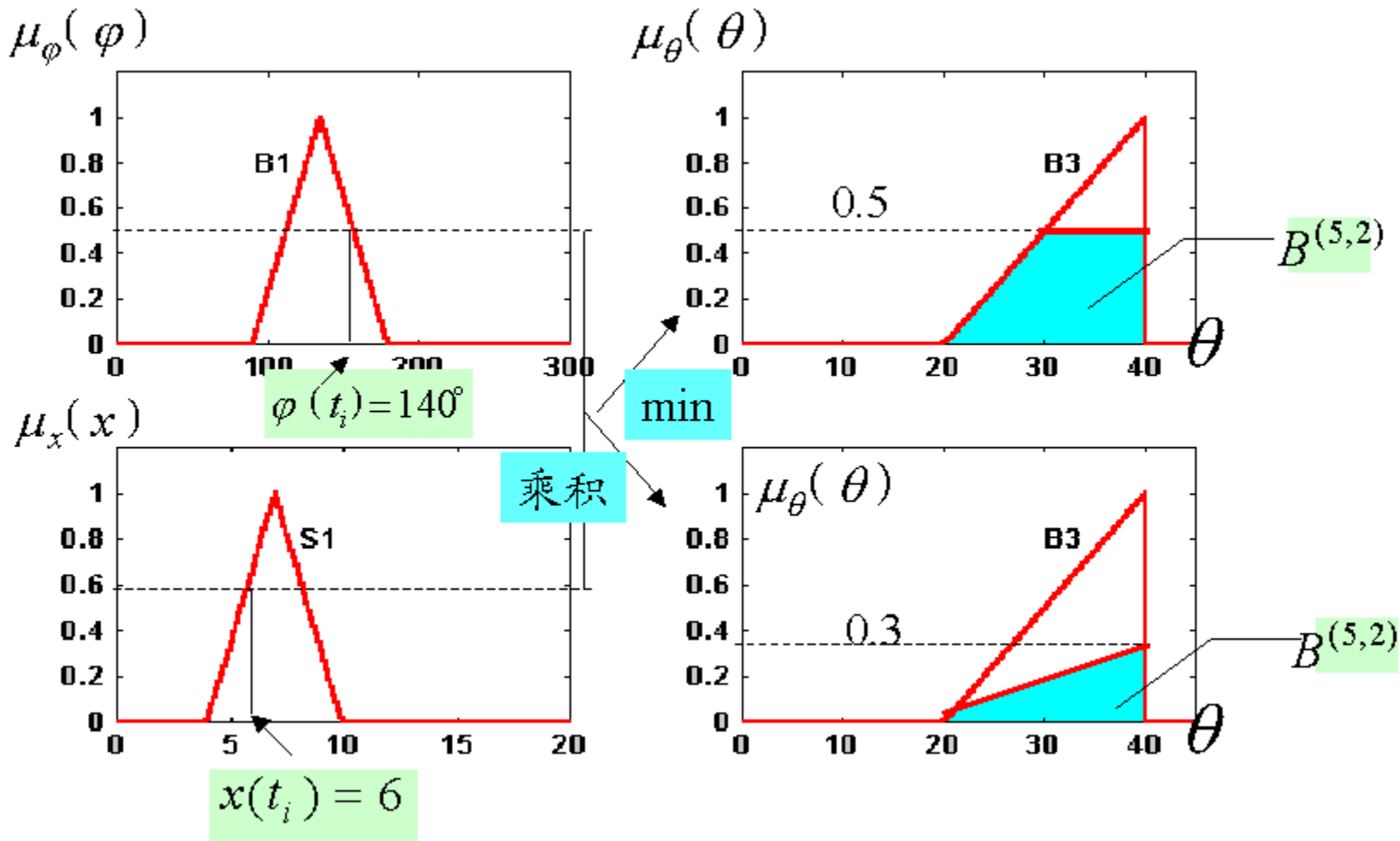


推理举例： 当货车状态为 $\varphi(t_i) = 140^\circ$, $x(t_i) = 6$ 时，激活3条规则：

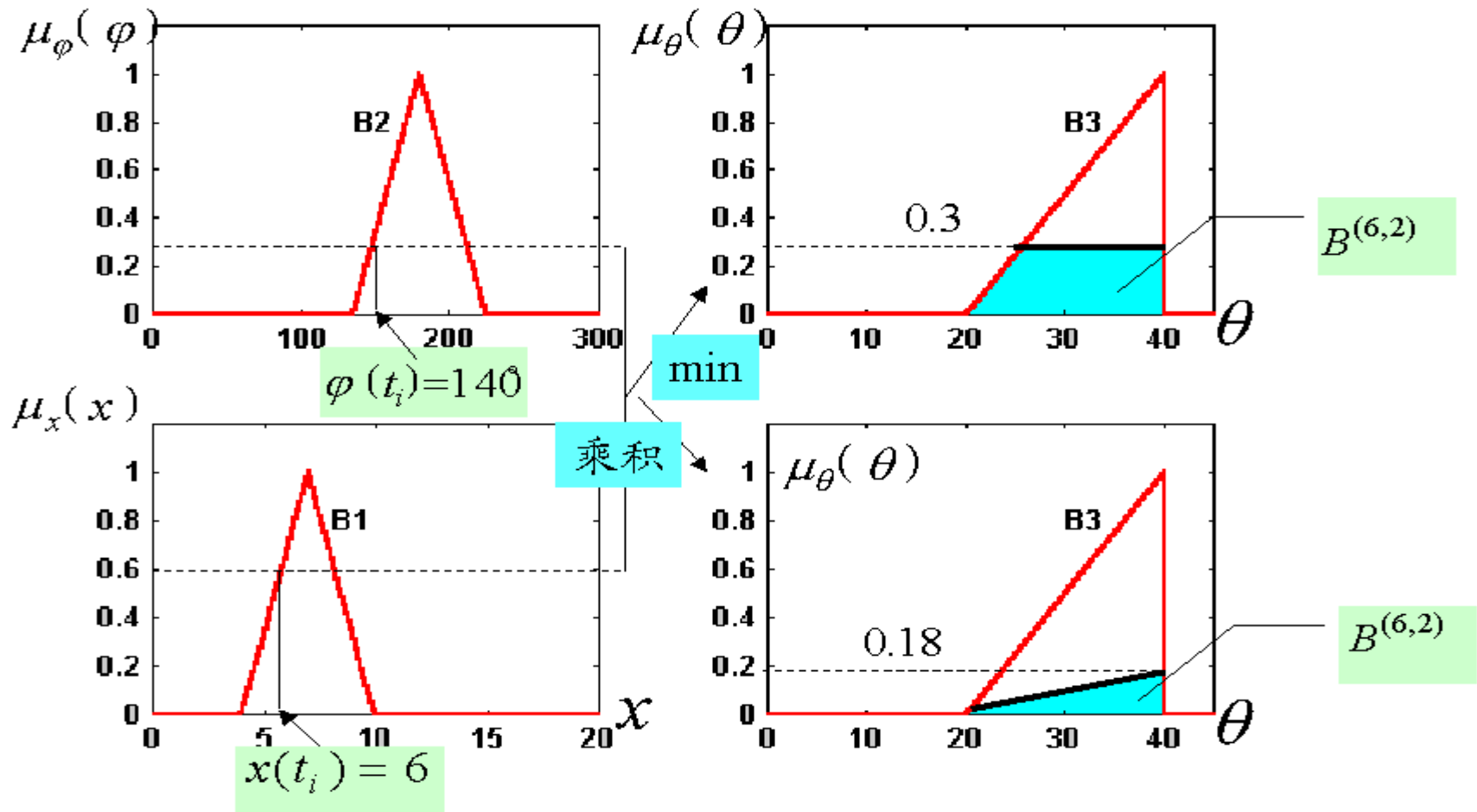
1) $R^{(5,1)}$: if φ 是 B_1 和 x 是 S_2 , then θ 是 B_2 ;



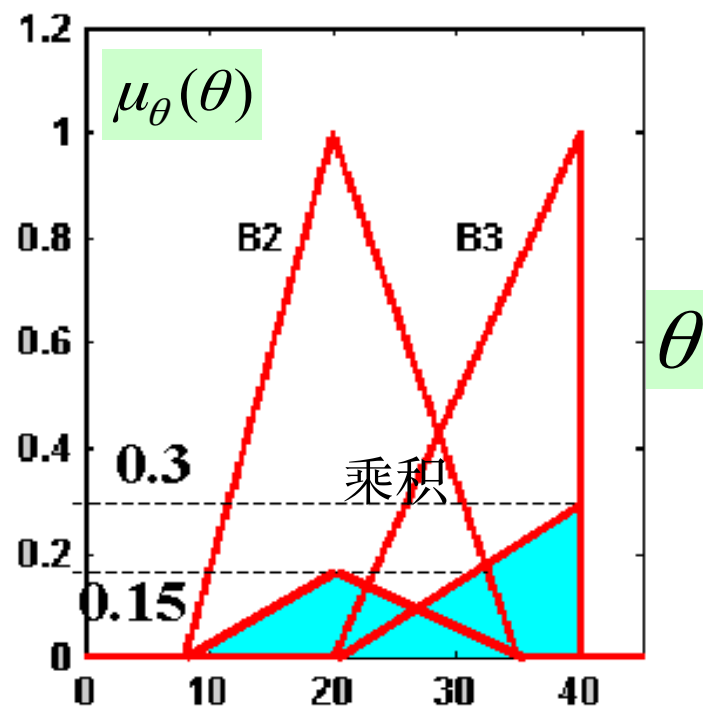
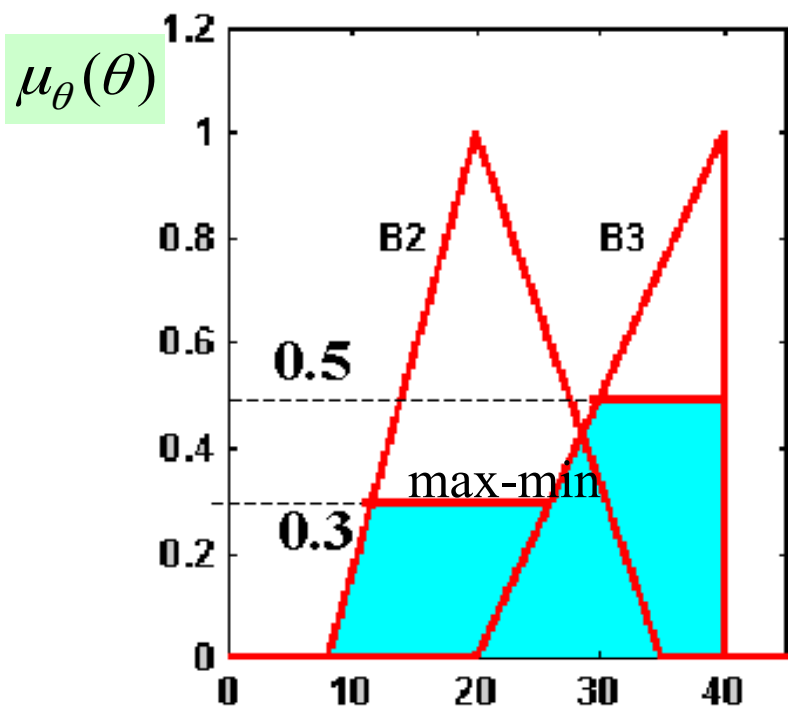
2) $R^{(5,2)}$: if φ 是 B_1 和 x 是 S_1 , then θ 是 B_3 ;



3) $R^{(6,2)}$: if φ is B_2 and x is S_1 , then θ is B_3 ;



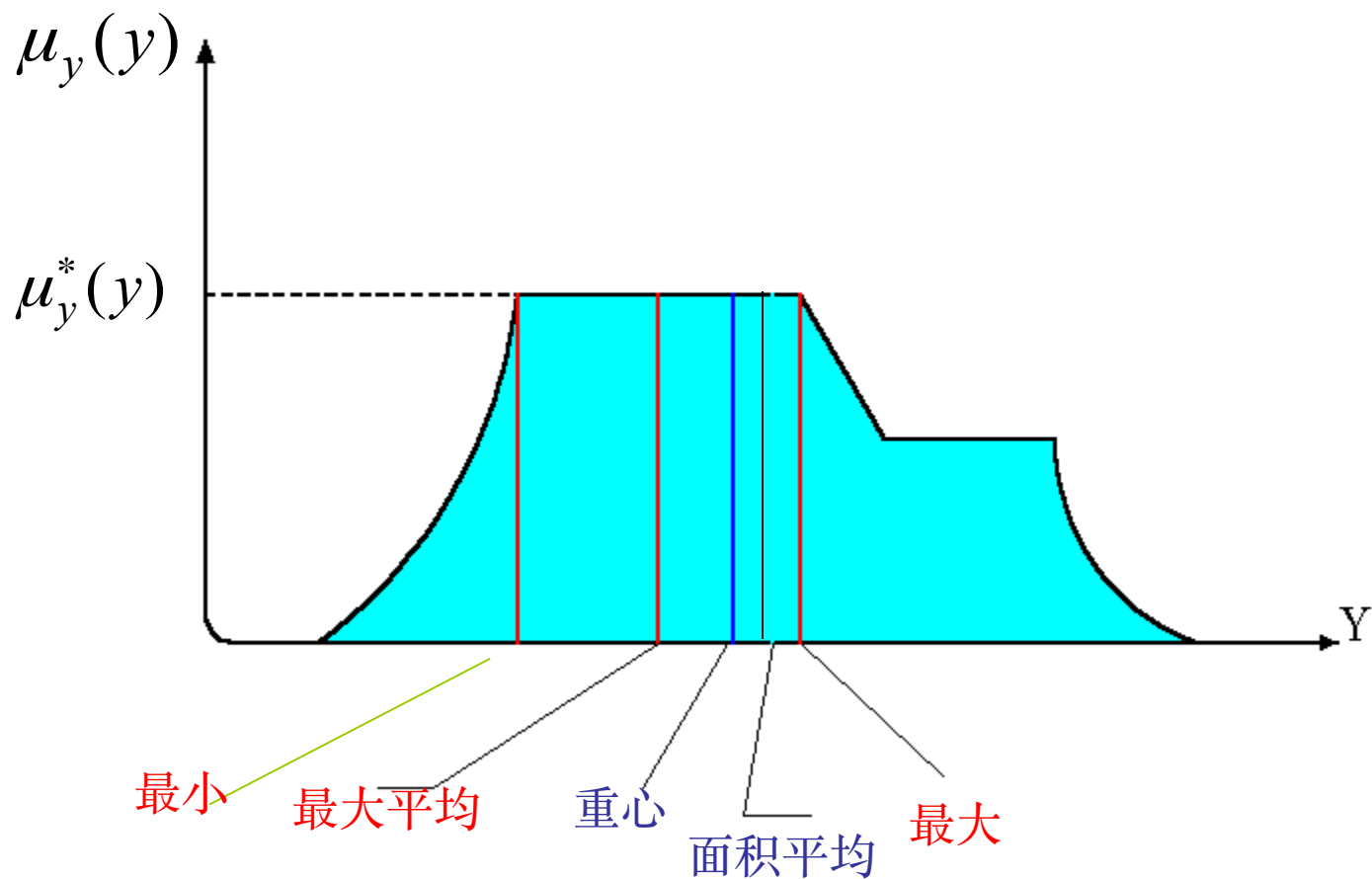
3 条规则合成所获得的输出为：



总的输出模糊集合

4. 去模糊化

输出隶属函数的一般形式：



1. 极大去模糊化

2) 重心法去模糊

$$\bar{y} = [\int_S y \mu_B(y) dy] / \int_S \mu_B(y) dy$$

对离散域 $\bar{y} = [\sum_{i=1}^l y_i \mu_B(y_i)] / \sum_{i=1}^l \mu_B(y_i)$

3) 面积均分去模糊

$$\int_a^{\bar{y}} \mu_B(y) dy = \int_{\bar{y}}^b \mu_B(y) dy$$

模糊推理的常用模式

Mamdani 推理

例：速度控制问题规则

*IF Speed is High AND Acceleration is Small
THEN Braking is (should be) Modest*

一般形式：

IF x_1 is M_1 AND x_2 is M_2 AND x_3 is M_3 THEN u_1 is M_4 u_2 is M_5

常见形式：

IF $y(n)$ is M_1 AND $y(n-1)$ is M_2 AND $y(n-2)$ is M_3 AND $u(n)$ is M_4 AND $u(n-1)$ is M_5

THEN $y(n + 1)$ is M_6

模糊推理的常用模式

Takagi Sugeno 模糊推理

一般形式：

IF x_1 is M_1 AND x_2 is M_2 AND x_3 is M_3

THEN $u_1 = f(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = g(x_1, x_2, x_3)$

常见形式：

IF $y(n)$ is M_1 AND $y(n-1)$ is M_2 AND $y(n-2)$ is M_3 AND $u(n)$ is M_4 AND $u(n-1)$ is M_5

THEN $y(n+1) = F(y(n), y(n-1), y(n-2), u(n), u(n-1))$

模糊推理的常用模式

