基于模糊推理的智能控制

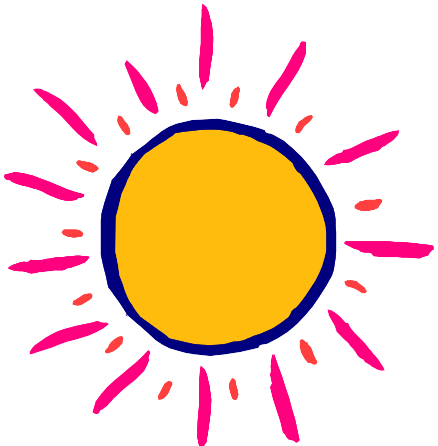
1）模糊集合与模糊数学

2）模糊逻辑推理

3）模糊控制器

4）模糊控制系统

0. 模糊概念



天气冷热

雨的大小

风的强弱

人的胖瘦

年龄大小

个子高低

1）模糊集合

常用术语

① 模糊集合和隶属函数

精确集合（非此即彼）： A={X|X>6}

精确集合的隶属函数：

$$\mu_A = \begin{cases} 1 & \text{如果 } X \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{如果 } X \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

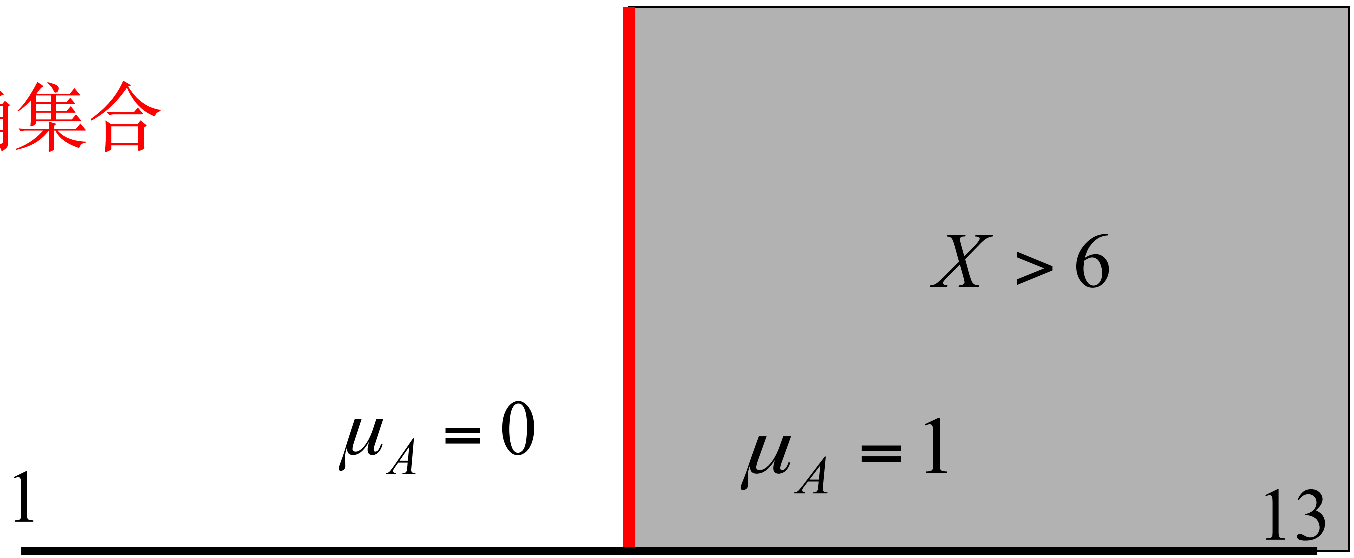
模糊集合：

如果X 是对象 x 的集合，则X 的模糊集合A ：

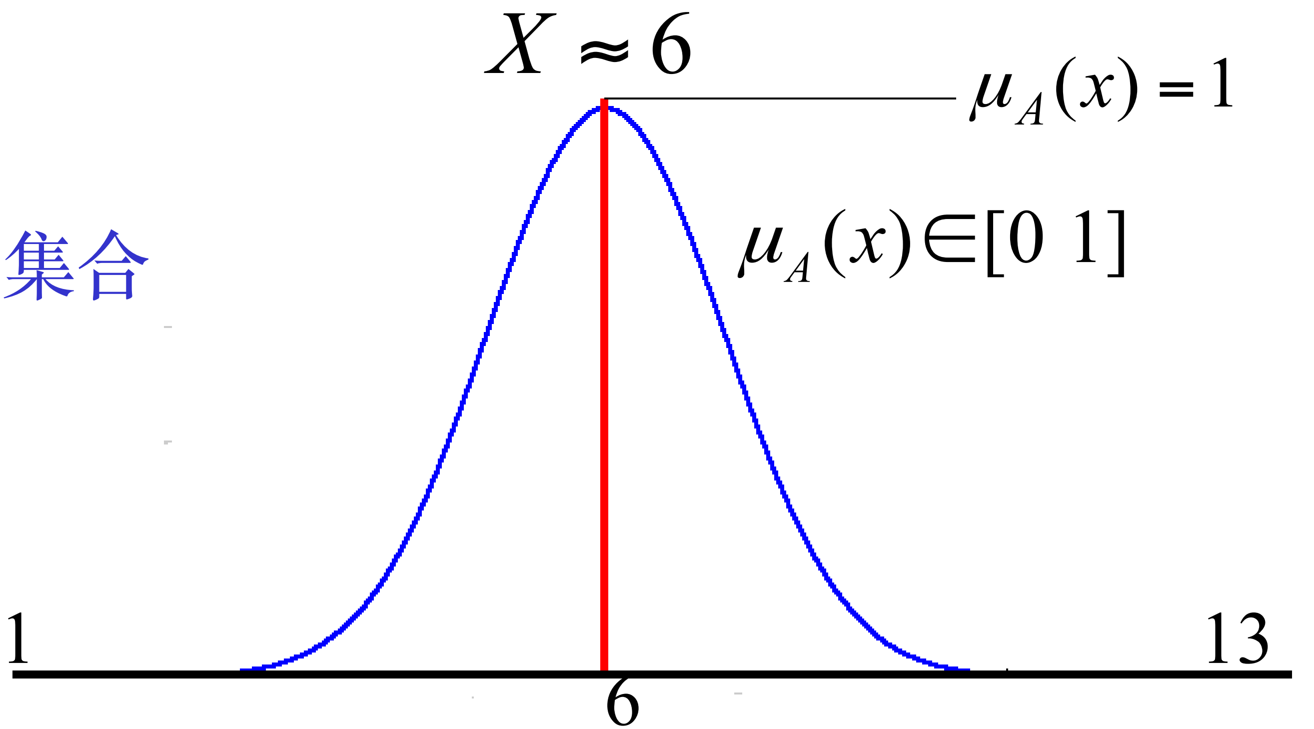
$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

$\mu_A(x)$称为模糊集合A的隶属函数（简写为MF）

精确集合



模糊集合



X称为论域或域

隶属函数的性质：

a) 定义为有序对；

b) 隶属函数在 0 和 1 之间；

c) 其值的确定具有主观性和个人的偏好。

二种描述形式：

1）离散形式（有序或无序）：

举例：X={ 上海 北京 天津 西安 } 为城市的集合。

模糊集合 C＝“ 喜欢该城市”可以表示为：

C = {(上海 ,0.8),(北京 ,0.9), (天津 ,0.7),(西安 ,0.6)}

又：X = {0 1 2 3 4 5 6} 为一个家庭可拥有交通工具数目的集合

模糊集合 C＝“ 合适的交通工具数目”

C = {(0,0.1),(1,0.3),(2,0.7),(3,1.0),(4,0.7),(5,0.3),(6,0.1)}

2) 连续形式：

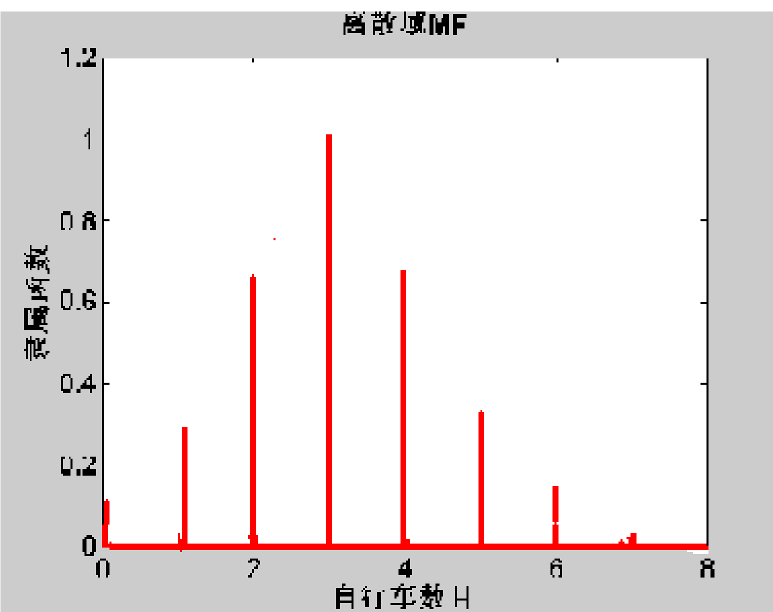
令 X = R⁺ 为人类年龄的集合，

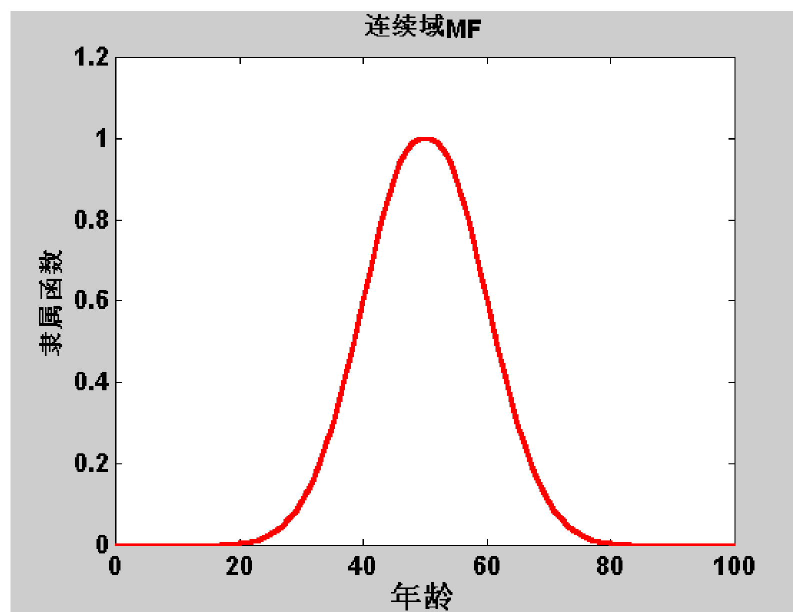
模糊集合 B = “年龄在 50 岁左右”则表示为：

$$B = \{x, \mu_B(x) \mid x \in X\}$$

式中： $$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x-50}{10})^4}$$

图示：





模糊集合的公式表示

$$A=\begin{cases}\sum_{x_i\in X}\mu_A(x_i)/x_i & X\text{为离散对象集合}\\ \int_X \mu_A(x_i)/x & X\text{为连续空间（通常为实轴）}\end{cases}$$

注意：$\sum$ 和 $\int$ 并非求和和积分符号 .

上述三个例子分别可写为

C = 0.8 / 上海 +0.9 / 北京 +0.7 / 天津 +0.6 / 西安

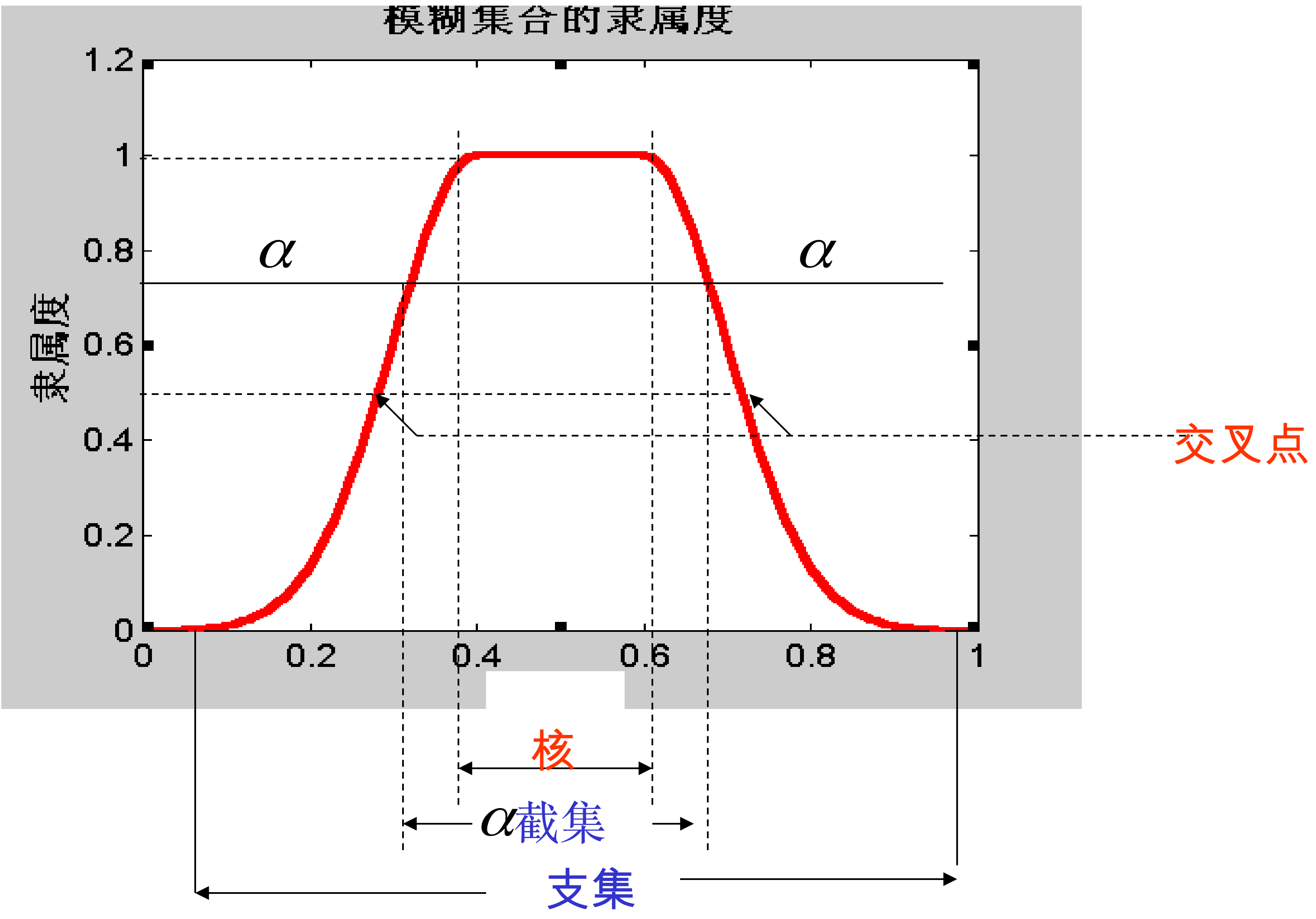
E = 0.1/0+0.3/1+0.7/2+1.0/4+0.3/5+0.1/6

$$B=\int_{R^+}\frac{1}{1+(\frac{x-50}{10})^4}/x$$

/ 不是除法运算

② 支集

$$支集(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$$

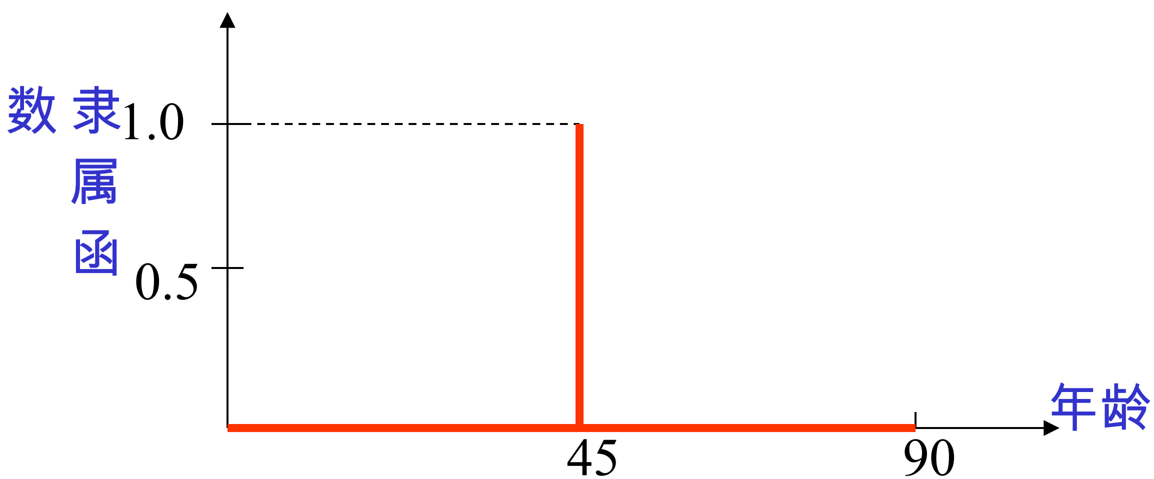


③ 核　　核（A）$=\{x\mid\mu_A(x)=1\}$

④ α 截集　　α 截集（A）$=\{x\mid\mu_A(x)\quad\alpha\}$

⑤ 交叉点　　交叉点（A）$=\{x\mid\mu_A(x)=0.5\}$

⑥ 模糊单点　　$\mu_A(x)=1$ 的单点支集



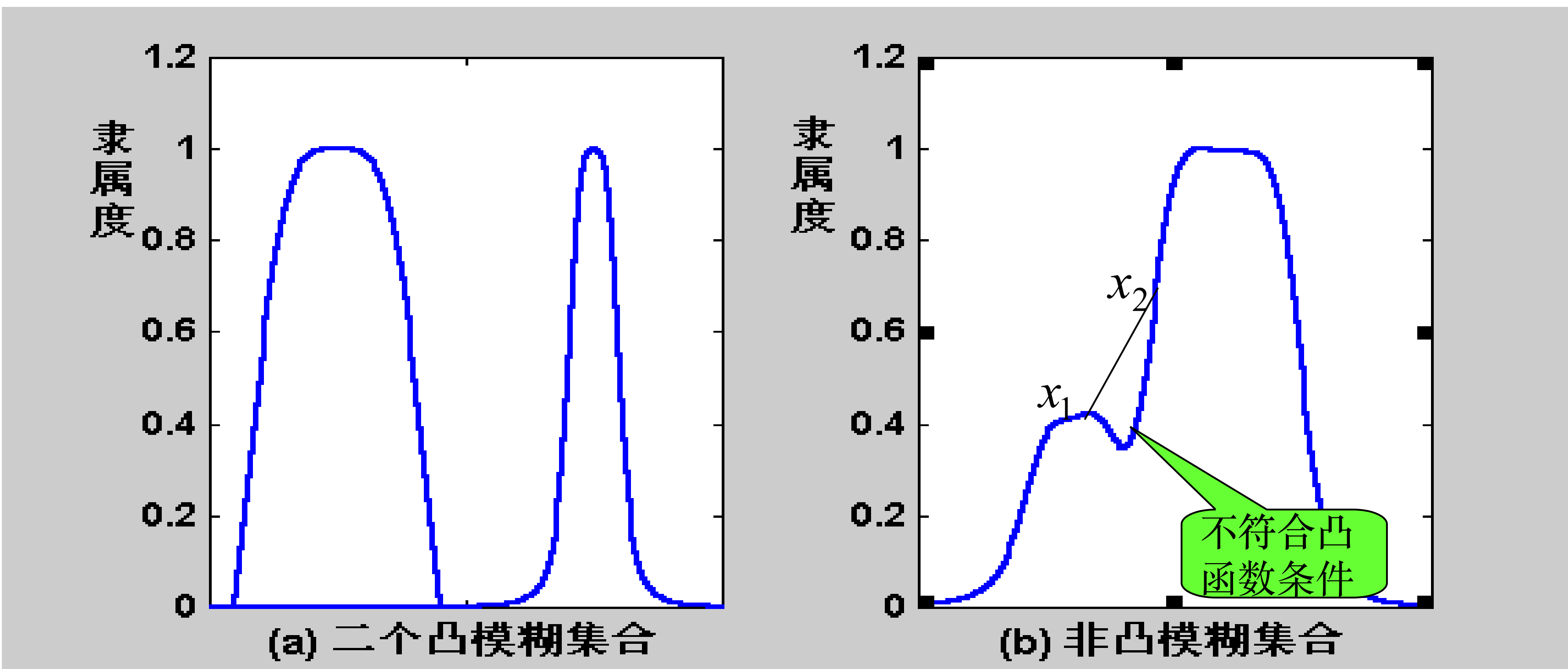
⑦ 凸性　　一个模糊集合是凸的，当仅当任何$x_1,x_2\in X$
和任何$\lambda\in[0,1]$，满足：

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \quad \min\{\mu_A(x_1), \mu_2(x_2)\}$$

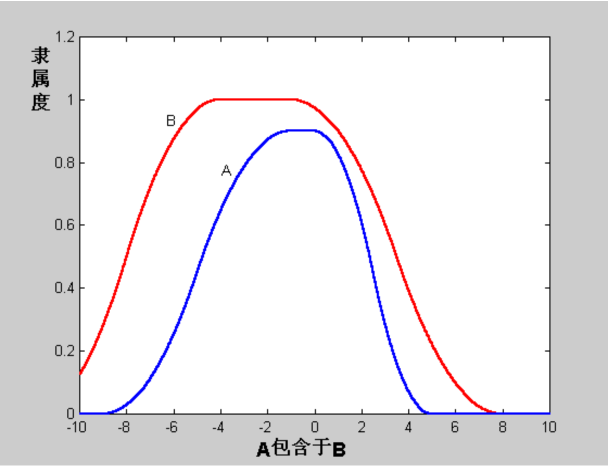
普通函数凸的定义：

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \quad \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

它的定义比模糊凸的定义严格



模糊集合的运算和隶属函数的参数化



包含或子集： $A \subseteq B \leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x)$

并（析取）

$$C = A \cup B$$

$$\mu_C = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

交（合取）

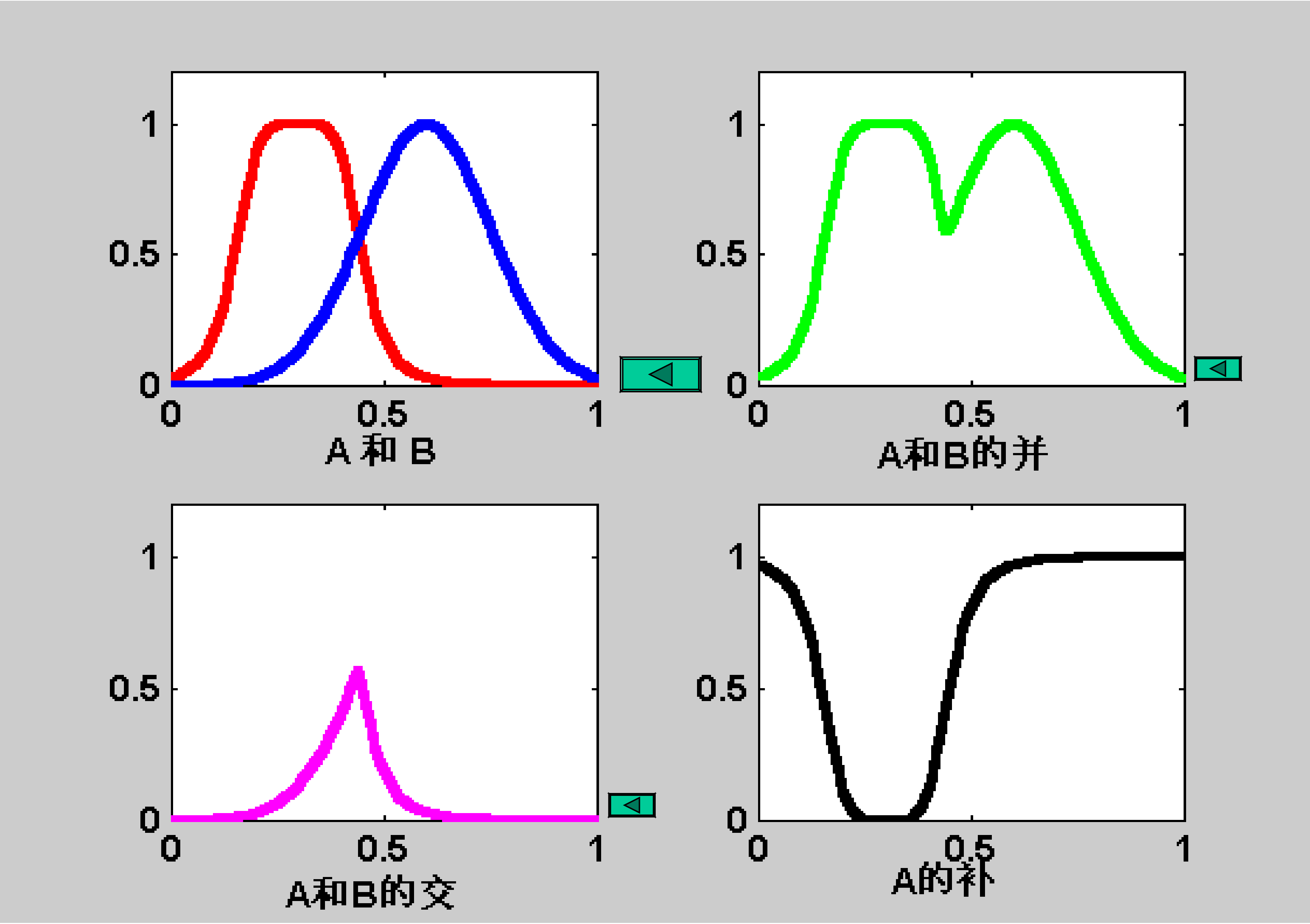
$$C = A \cap B$$

$$\mu_C = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A \wedge \mu_B$$

补（负）

$\overline{A}, -A$或非A

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



1
0.5
0
0
0.5
1
A 和 B
1
0.5
0
0
0.5
1
A和B的并
1
0.5
0
0
0.5
1
A和B的交
1
0.5
0
0
0.5
1
A的补

隶属函数参数化

三角形隶属函数

$$trig(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ \frac{c-x}{c-b} & b\le x\le c\\ 0 & c\le x\end{cases}$$

梯形隶属函数

$$Trap(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b\le x\le c\\ \frac{d-x}{d-c} & c\le x\le d\\ 0 & d\le x\end{cases}$$

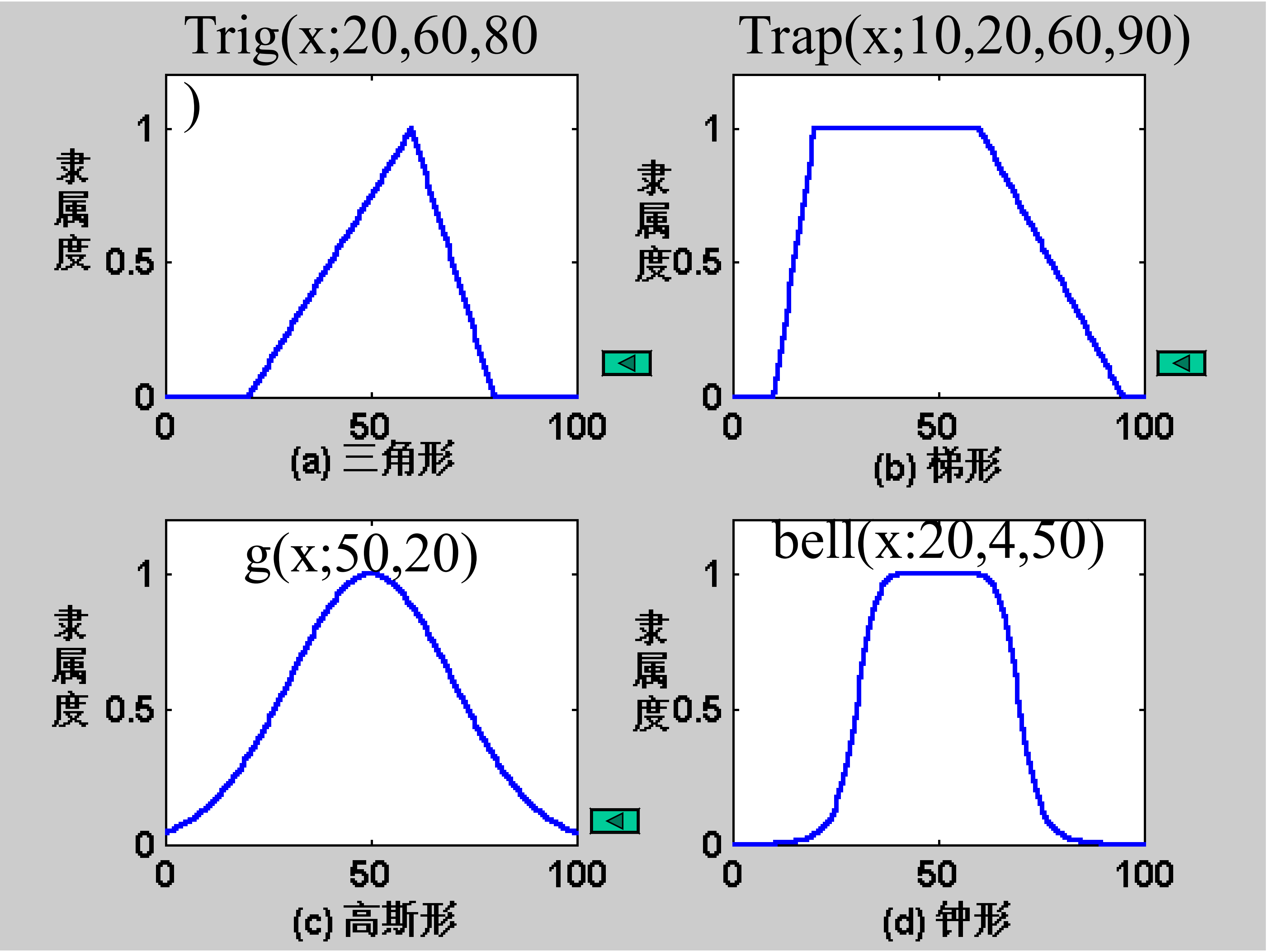
高斯形隶属函数

$$g(x;c,\sigma)=e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-c}{\sigma})^2}$$

c代表MF的中心；σ决定MF的宽度。

一般钟形隶属函数

$$bell(x;a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

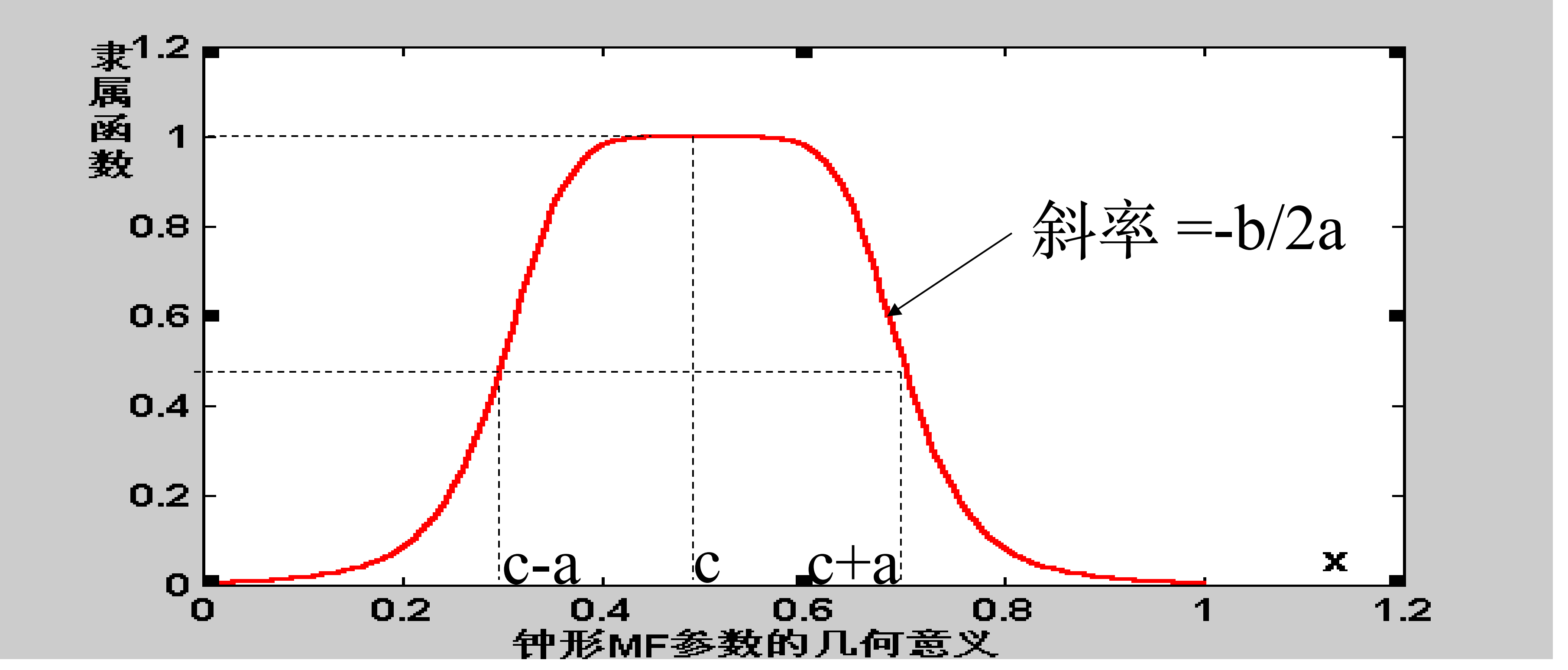

Trig(x;20,60,80
)
Trap(x;10,20,60,90)
g(x;50,20)
bell(x:20,4,50)
隶属度
1
0.5
0
0
50
100
(a) 三角形
(b) 梯形
(c) 高斯形
(d) 钟形

隶属函数的参数化：

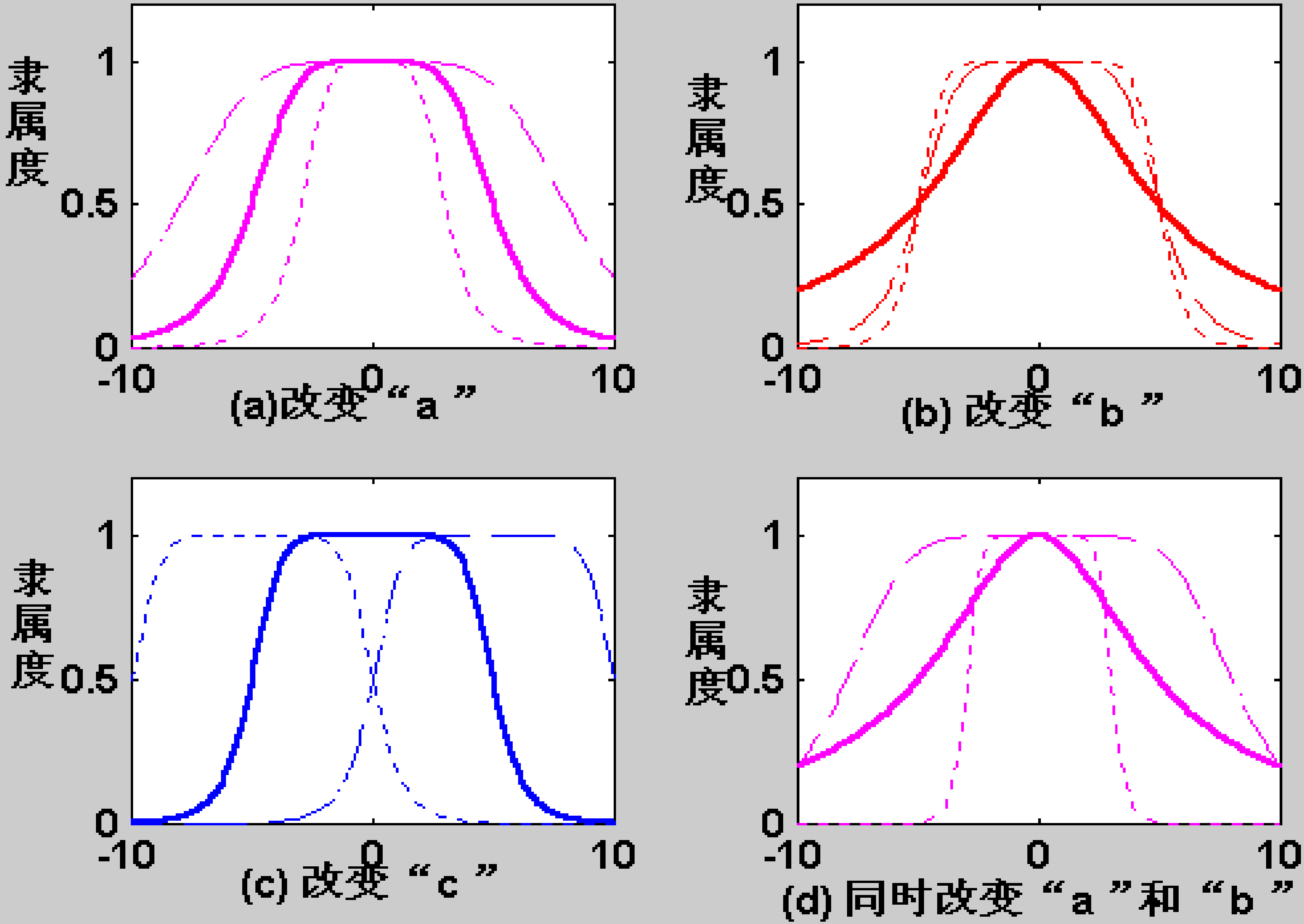
以钟形函数为例，

$$bell(x;a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

a,b,c, 的几何意义如图所示。



改变 a,b,c, 即可改变隶属函数的形状。



隶属度
1
0.5
0
-10
0
10
(a)改变“a ”
隶属度
1
0.5
0
-10
0
10
(b) 改变 “b ”
隶属度
1
0.5
0
-10
0
10
(c) 改变 “c ”
隶属度
1
0.5
0
-10
0
10
(d) 同时改变 “a ”和 “b ”

模糊隶属函数的修正（Hedges)

1) 压缩 (Concentration)

$$\mu_{\text{conA}}(x) = [\mu_A(x)]^2$$

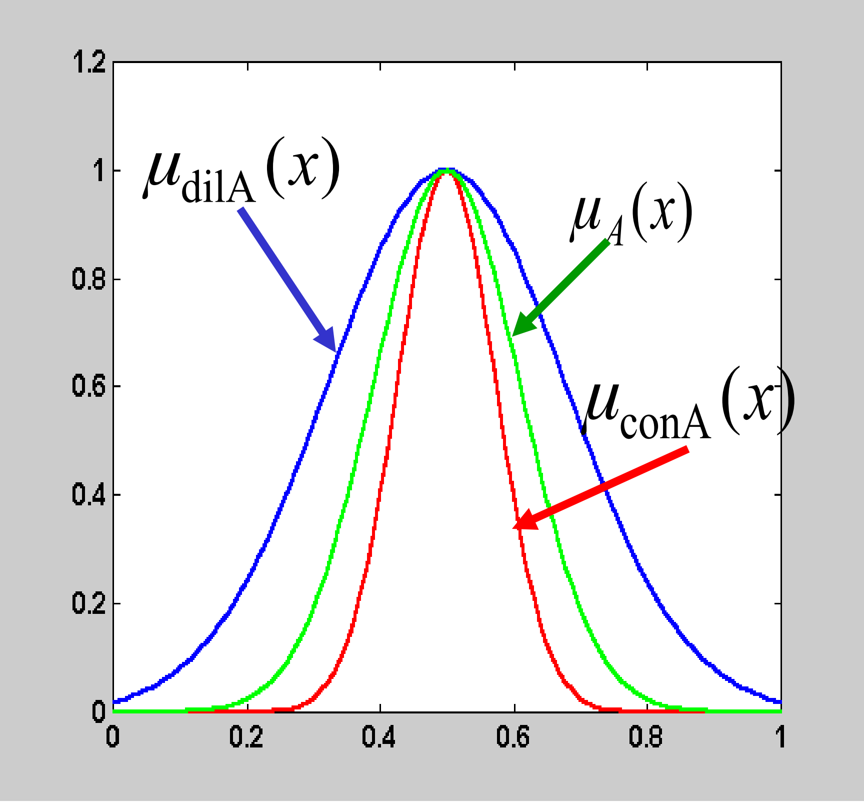
2) 扩展 (Dilation)

$$\mu_{\text{dilA}}(x) = [\mu_A(x)]^{0.5}$$

3) 人为修正 (plus 或 minus)

$$\mu_{\text{plus}}(x) = [\mu_A(x)]^{1.25}$$

$$\mu_{\text{minus}}(x) = [\mu_A(x)]^{0.75}$$



模糊集合的其他运算

1）三角范式运算：

二个模糊集合 A 和 B 的“交”用函数

$T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 来确定。

$$\mu_{A\cap B}(x)=T(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_A(x)\,\tilde{*}\,\mu_B(x)$$

4 个最常用的 T 范式算子：

交（极小）：$T_{\min}(a,b)=a\wedge b=\min(a,b)$

代数积：$T_{ap}(a,b)=a\bullet b=ab$

有界积：$T_{bp}(a,b)=a\otimes b=\max\{0,a+b-1\}$

强积：$T_{dp}(a,b)=a\,\hat{\bullet}\,b=\begin{cases} a & \text{如}b=1 \\ b & \text{如a}=1 \\ 0 & \text{如}a,b<1 \end{cases}$

2）协三角运算 S— 范式

二个模糊集合 A 和 B 的“并”用函数

$S:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ 来确定。

$$\mu_{A\cup B}(x)=S(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_A(x)\tilde{+}\mu_B(x)$$

4 个最常用的 S 范式算子：

并（极大）： $S_{\max}(a,b)=a\vee b=\max(a,b)$

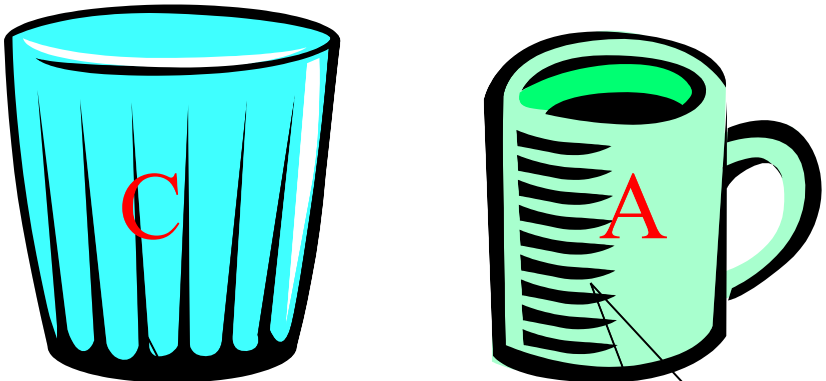
代数和： $S_{as}(a,b)=a\hat{+}b=a+b-ab$

有界和： $S_{bs}(a,b)=a\oplus b=\min\{1,a+b\}$

强和： $S_{ds}(a,b)=a\dot{\cup}b=\begin{cases}a & \text{如}b=0\\ b & \text{如a}=0\\ 1 & \text{如}a,b>0\end{cases}$

模糊与概率的差别：

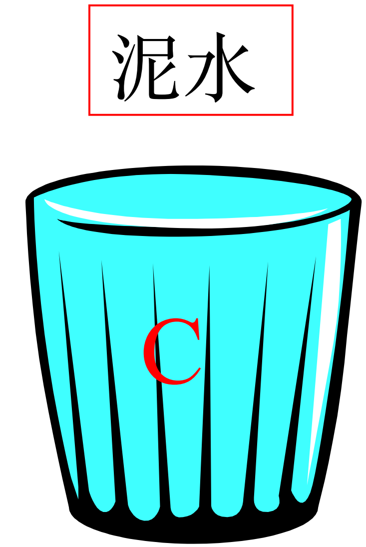
口极渴的人饮用哪杯液体？



$\mu_L(C) = 0.91$

$P_r[A \in L] = 0.91$

$L = \{$可饮液体的集合$\}$



$$\mu_L(C) = 0.91 \qquad P_r[A \in L] = 0$$

1）模糊隶属函数表示物体（对象）对不精确定义性质的相似程度。

2）概率把信息转变为事件发生或出现的频度。

模糊关系与复合运算

精确关系

表示二个或二个以上集合元素之间关联、交互、互连是否存在。

$$R(U,V)=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$$

U,V 是二个精确的集合。

$$\mu_R=\begin{cases}1 & 当只当\ (x,y)\in R(U\times V)\\0 & 其它。\end{cases}$$

模糊关系

表示二个或二个以上集合元素之间关联、交互、互连是否存在或不存在的程度。

$$R(U,V)=\{(x,y,\mu_R(x,y))\mid(x,y)\in U\times V\}$$

U,V 是二个论域。

$$\mu_R(x,y)=[0,1]$$

举例

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 1.0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1.0 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

同一空间模糊关系复合运算：

$$\mu_{R\cap S}(x,y)=\mu_R(x,y)\otimes\mu_S(x,y)$$ （三角范式运算）

取极小运算

或

$$\mu_{R\cup S}(x,y)=\mu_R(x,y)\oplus\mu_S(x,y)$$ （协三角范式运算）

取极大运算

举例

$$\mu_M(x,y)=\begin{pmatrix}0.8 & 1 & 0.1 & 0.7\\ 0 & 0.8 & 0 & 0\\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$\mu_{M\cap L}(x,y)=\begin{pmatrix}0.4 & 0 & 0.1 & 0.6\\ 0 & 0.4 & 0 & 0\\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5\end{pmatrix}$$

$$\mu_L(x,y)=\begin{pmatrix}0.4 & 0 & 0.9 & 0.6\\ 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7\\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5\end{pmatrix}$$

$$\mu_{M\cup L}(x,y)=\begin{pmatrix}0.8 & 1 & 0.9 & 0.7\\ 0.9 & 0.8 & 0.5 & 0.7\\ 0.9 & 1 & 0.8 & 0.8\end{pmatrix}$$

非同一空间模糊关系复合运算：

不同乘积空间，但有一个公共集合的二个模糊关系 R(U,V) 和 S(V,Z) 的复合定义为：

$$P = R \circ S$$

常用的模糊复合运算：

1) max－min 复合运算

$$\mu_{P \circ S}(x,z) = \{(x,z), \sup_{y \in V}[\min(\mu_P(x,y), \mu_S(y,z))\}$$

2) max - 乘积复合运算

$$\mu_{P \circ S}(x,z) = \{(x,w), \sup_{y \in V}[(\mu_P(x,y) \bullet \mu_S(y,z))\}$$

当 U,V,W 是离散论域时，
Sup(取上界) 变成取极大运算

非同一空间模糊关系复合运算举例与图示：

举例

令$\boldsymbol{X} = \{1,2,3\}$，$\boldsymbol{Y} = \{\alpha, \beta, \gamma, \sigma\}$，$\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$

$$\boldsymbol{R}\ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

采用max－min复合

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

采用max－乘积复合：

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.30 \\ 0.63 & 0.48 \\ 0.54 & 0.24 \end{pmatrix}$$

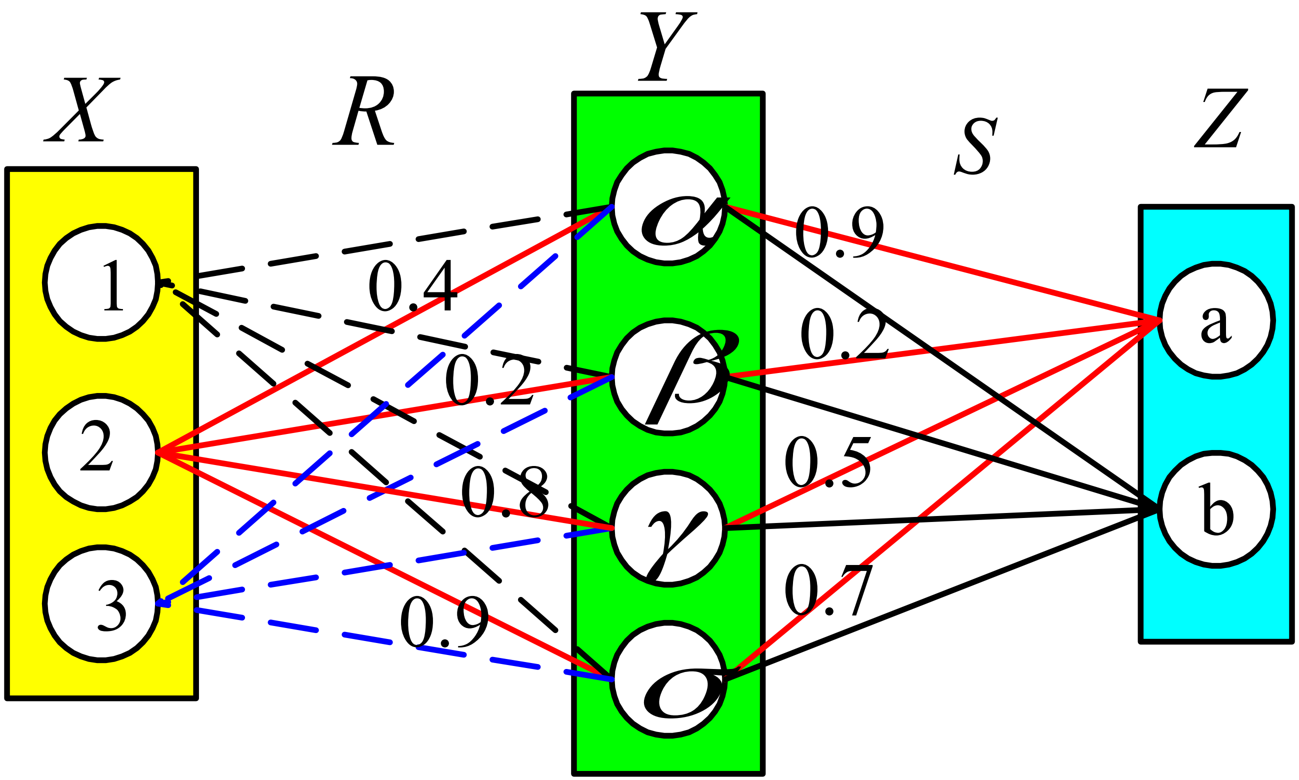
$$\mu_{R \circ S}(2, a) = \max\,(0.4 \wedge 0.9, 0.2 \wedge 0.2, 0.8 \wedge 0.5, 0.9 \wedge 0.7)$$

$$= \max\,(0.4, 0.2, 0.5, 0.7) = 0.7$$

$$\mu_{R \circ S}(2, a) = \max\,(0.4 \times 0.9, 0.2 \times 0.2, 0.8 \times 0.5, 0.9 \times 0.7)$$

$$= \max\,(0.36, 0.04, 0.4, 0.63) = 0.63$$

图示：



X 中元素 2 和 Z 中元素 a 通过二二连接建立的路径，选择
连接强度最大者，其强度由于路径强度乘积或取极小计算而得。