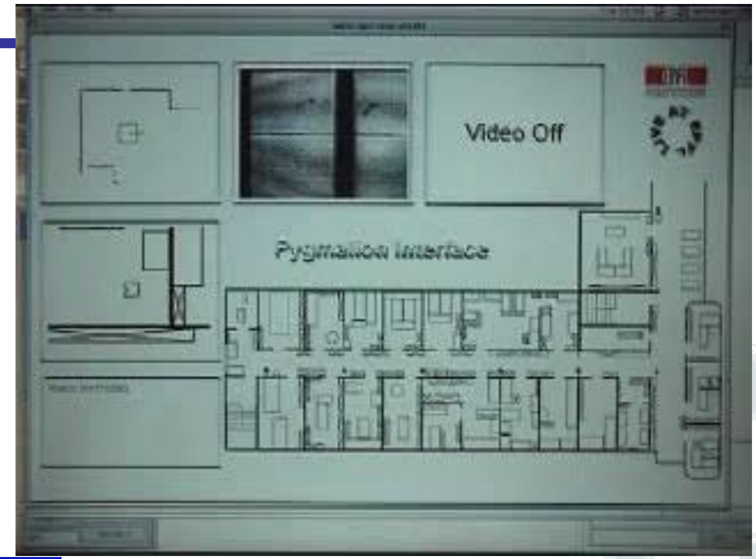
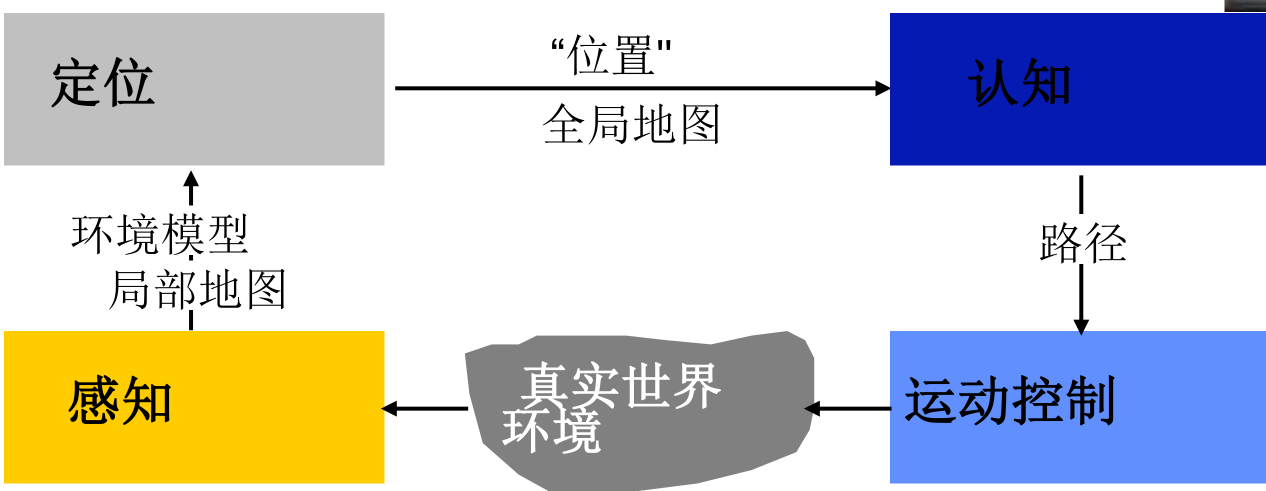
第 3 章 移动机器人运动学

- 移动机器人运动学特点
- 差动轮时的运动学关系（速度）
- 轮的滚动和滑动约束
- 因轮而产生的机器人约束方程
- 移动机器人的机动性、自由度和完整性
- 运动学位置控制

运动控制 (轮式机器人)

- 运动控制的需要
  - 机器人的运动学 / 动力学模型
  - 轮子与地面相互作用模型
  - 运动控制主要方法：
    速度控制，位置控制
  - 满足运动需求的控制律





引言：移动机器人运动学

- 目的
  - 机器人机械行为的描述，针对设计和控制。
  - 与机器人操作器（机械臂）运动学相似
  - 然而，移动机器人可以相对环境无限制地运动
    - 没有测量机器人位置的直接方法
    - 位置必须随时间累积
    - 位置（运动）估计导致误差
      -> 是移动机器人中首要挑战性问题
  - 从理解轮子 约束开始，理解移动机器人的运动，机器人机动性。

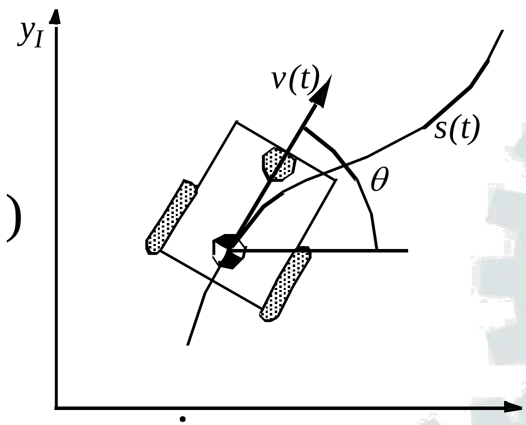
引言： 运动学模型

◈ 目的：

◈ 建立机器人速度 $\dot{\xi}=[\dot{x}\quad \dot{y}\quad \dot{\theta}]^T$ 与轮子速度 $\dot{\varphi}_i$、转向角 β_i 、转向角速度 $\dot{\beta}_i$ 以及机器人（结构坐标系）几何参数之间的函数关系。

◈ 前向运动学

$$\dot{\xi}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=f(\dot{\varphi}_1,\ldots\dot{\varphi}_n,\beta_1,\ldots\beta_m,\dot{\beta}_1,\ldots\dot{\beta}_m)$$



◈ 逆向运动学

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1 & \cdots & \dot{\varphi}_n & \beta_1 & \ldots & \beta_m & \dot{\beta}_1 & \ldots & \dot{\beta}_m\end{bmatrix}^T=f(\dot{x},\dot{y},\dot{\theta})$$

◈ 为什么没有

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ \theta\end{bmatrix}=f(\varphi_1,\ldots\varphi_n,\beta_1,\ldots\beta_m)$$

-> 并不直接

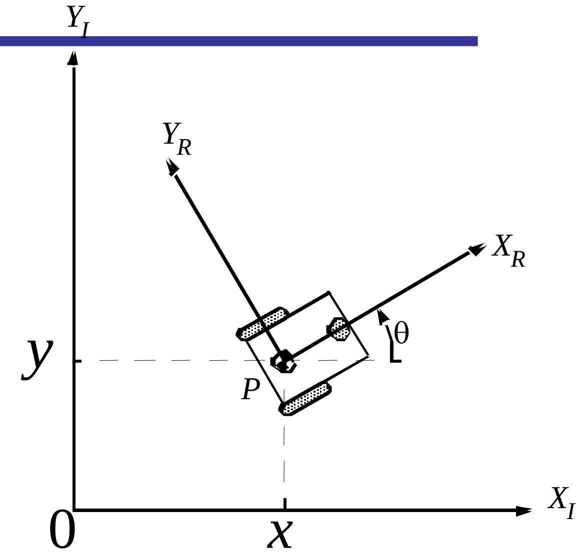
表示机器人位置

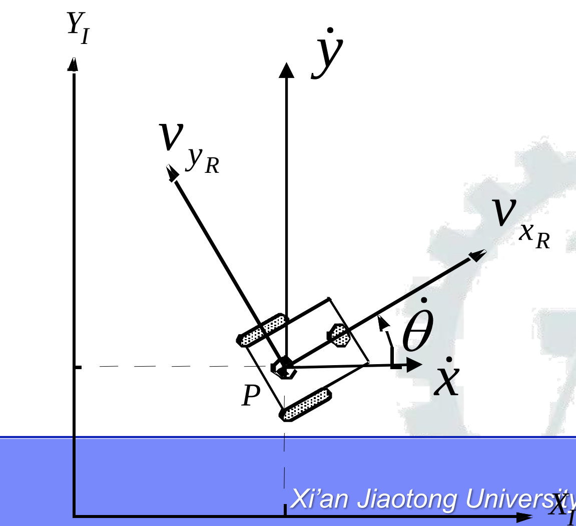
- 在任意惯性系中机器人的表示
  - 惯性系: $\{X_I, Y_I\}$
  - 机器人系: $\{X_R, Y_R\}$
  - 机器人位置: $\xi_I = [x \quad y \quad \theta]^T$
  - 机器人在惯性系下的速度

$$\dot{\xi}_I = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}]^T$$

  - 机器人相对本体坐标系的速度

$$\dot{\xi}_R = [v_{x_R} \quad v_{y_R} \quad \dot{\theta}]^T$$



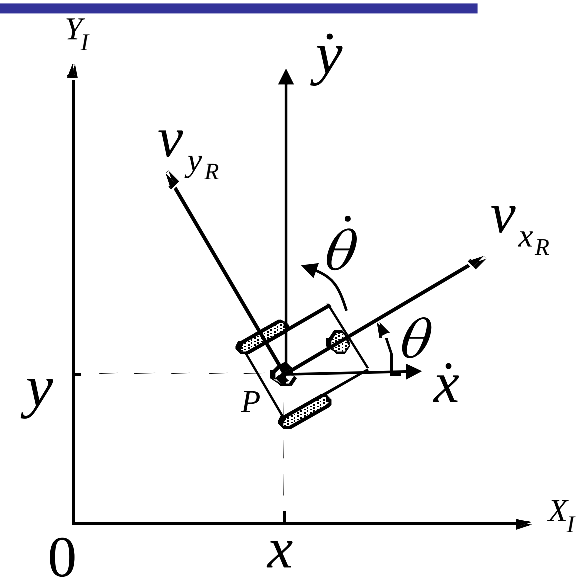


表示机器人位置

◇ 两个参照系之间的映射

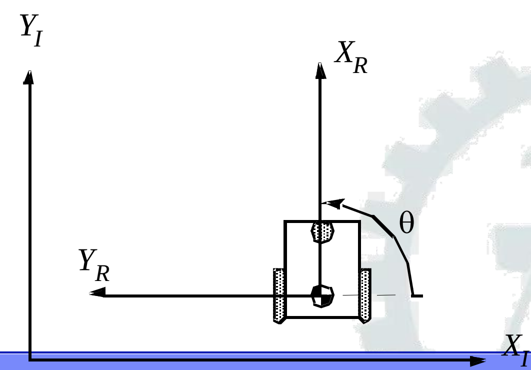
$$\dot{\xi}_R = R(\theta)\dot{\xi}_I = R(\theta)\cdot\begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{\theta}\end{bmatrix}^T$$

$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



◇ 惯性系下车辆的速度，可以转换为车自身的前向和侧向分速度（为控制）

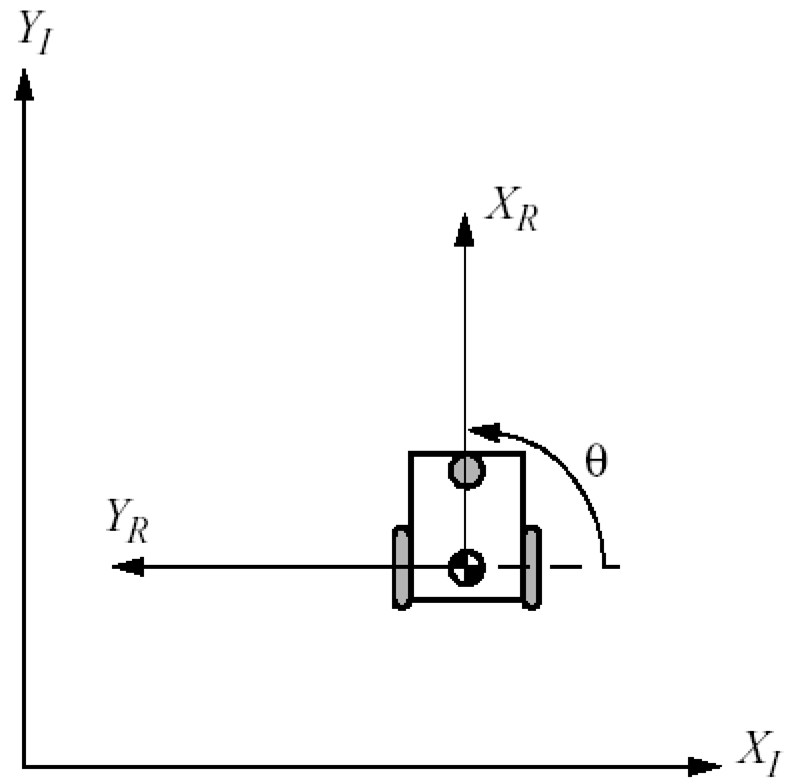
◇ 例: 机器人与 $\mathbf{Y_I}$ 对齐



例

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\xi}_R = R(\frac{\pi}{2})\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$



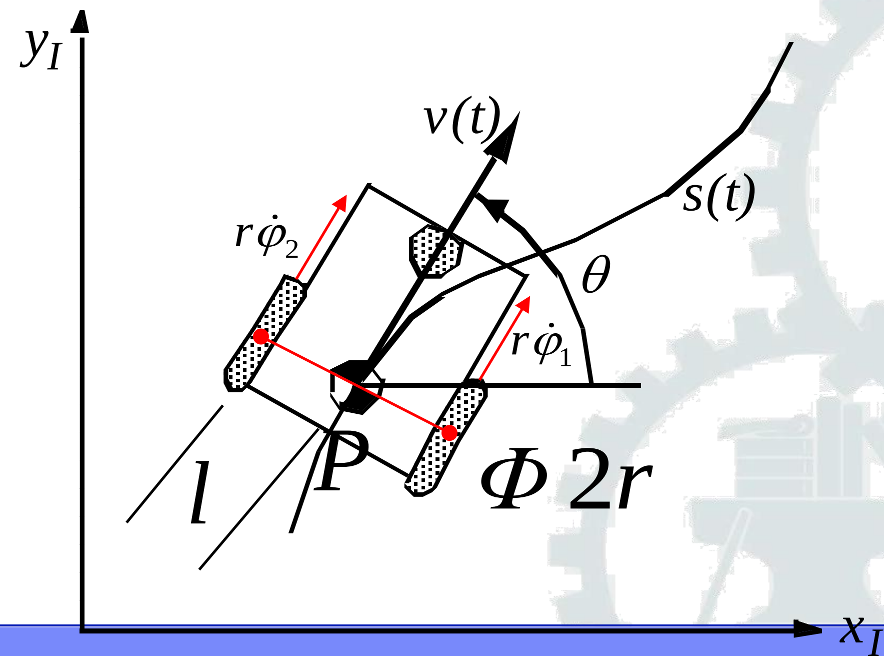
前向运动学模型

- 问题：
  - 给定机器人的几何特征和它的轮子转速，求机器人的运动速度
- 设差动驱动，轮子半径 r，轮距 $2l$，两轮中心点 P。
- *轮速方向定义：* $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ *为正*

  时产生 v 正向速度。
- 轮速与 v 和 $\dot{\theta}$ 的关系：

$$\begin{cases} r\dot{\varphi}_1 = v + l\dot{\theta} \\ r\dot{\varphi}_2 = v - l\dot{\theta} \end{cases}$$

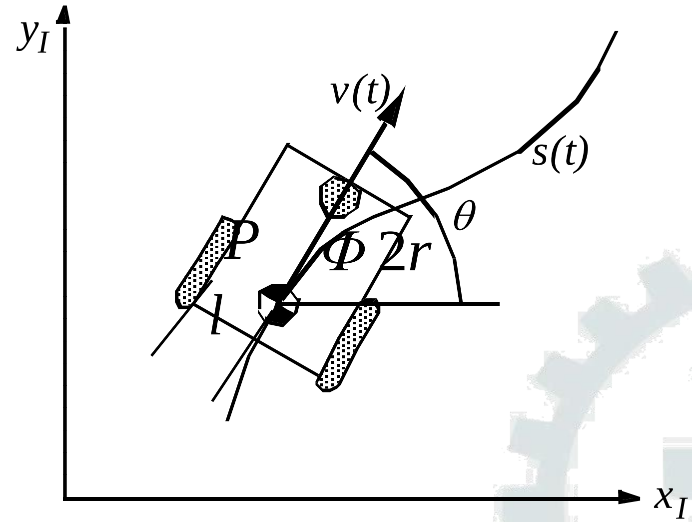
$$\Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{r(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)}{2} \\ \dot{\theta} = \dfrac{r(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)}{2l} \end{cases}$$



前向运动学模型

◈ 于是得到轮子转速与本体系速度关系：

$$\dot{\xi}_R=\begin{bmatrix} v_{x_R} \\ v_{y_R} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2) \\ 0 \\ \frac{r}{2l}(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2) \end{bmatrix}$$

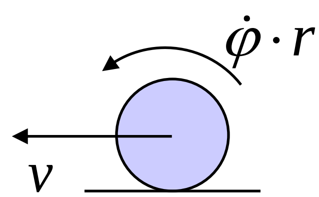


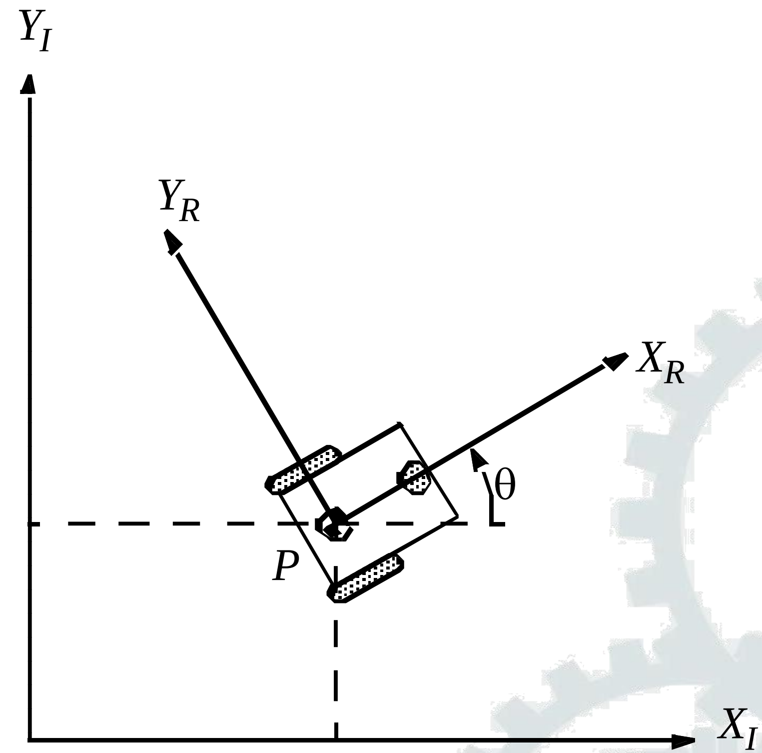
◈ 转换得到惯性系下的速度表示：

$$\dot{\xi}_I=\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}=R^{-1}(\theta)\begin{bmatrix} \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2) \\ 0 \\ \frac{r}{2l}(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2) \end{bmatrix}, \quad R^{-1}(\theta)=R^T(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

轮子运动学约束：假设

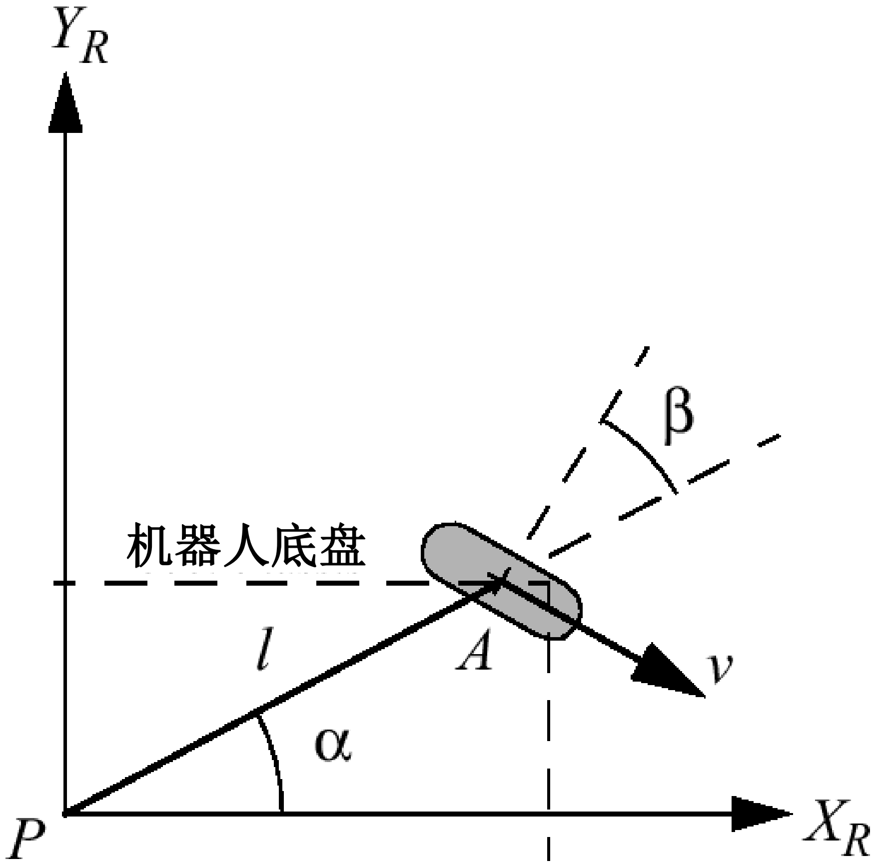
- 在水平面上运动
- 轮子与地面点接触
- 轮子不可变形
- 纯转动
  - 在接触点处，**v = 0**
- 没有任何滑动
- 绕触点没有转动摩擦
- 操纵轴与平面垂直
- 轮子与刚性框架（底盘）连接

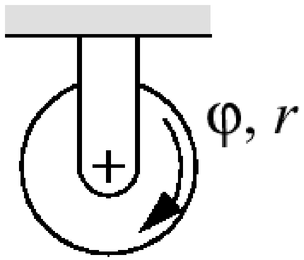




轮子运动学约束：

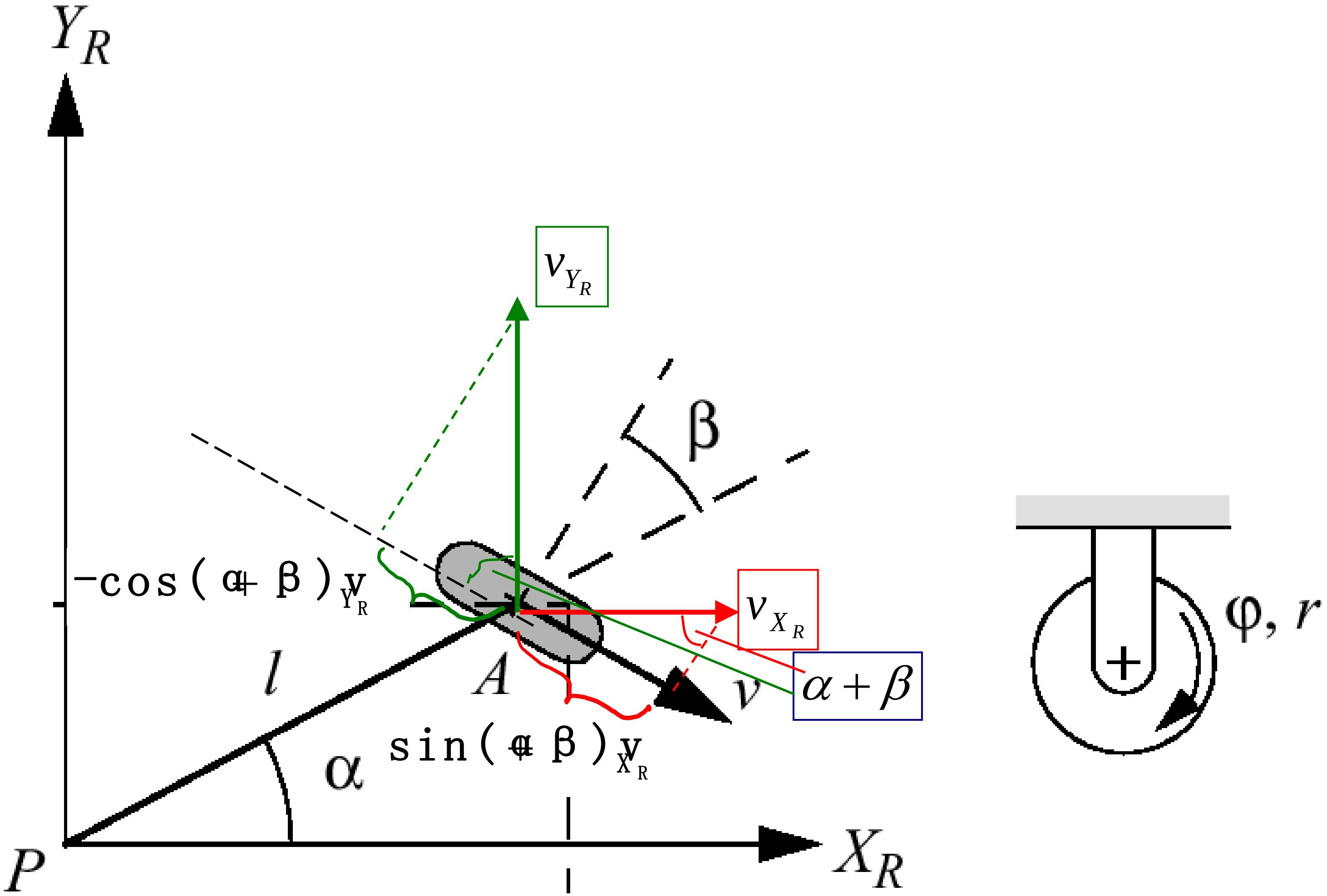
固定的标准轮





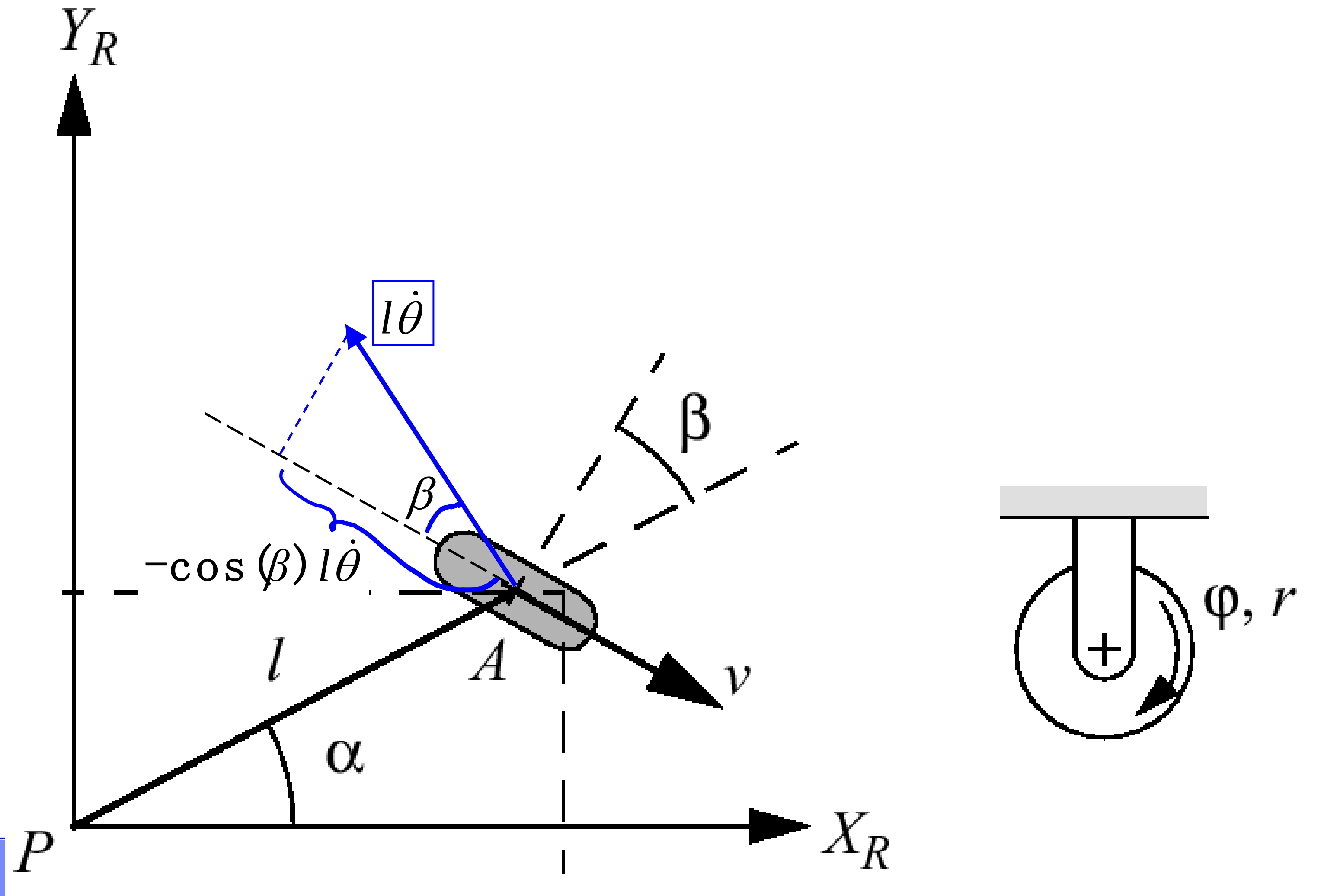
轮子运动学约束：

固定的标准轮—本体系速度折算为沿轮平面 v 方向的速度



轮子运动学约束：

固定的标准轮－本体系速度折算为沿轮平面 v 方向的速度



轮子运动学约束：

固定的标准轮

◇ 将本体系速度折算为沿轮平面 v 方向的速度 $r\dot{\varphi}$ ，即：

$$\sin(\alpha+\beta)v_{x_R} - \cos(\alpha+\beta)v_{y_R} - l\cos\beta\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$$

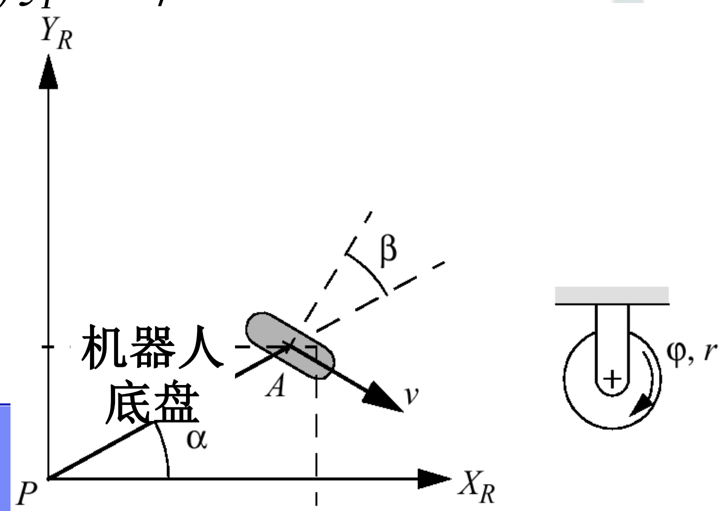
◇ 或

$$\left[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos\beta\right]\dot{\xi}_R = r\dot{\varphi}$$

OR

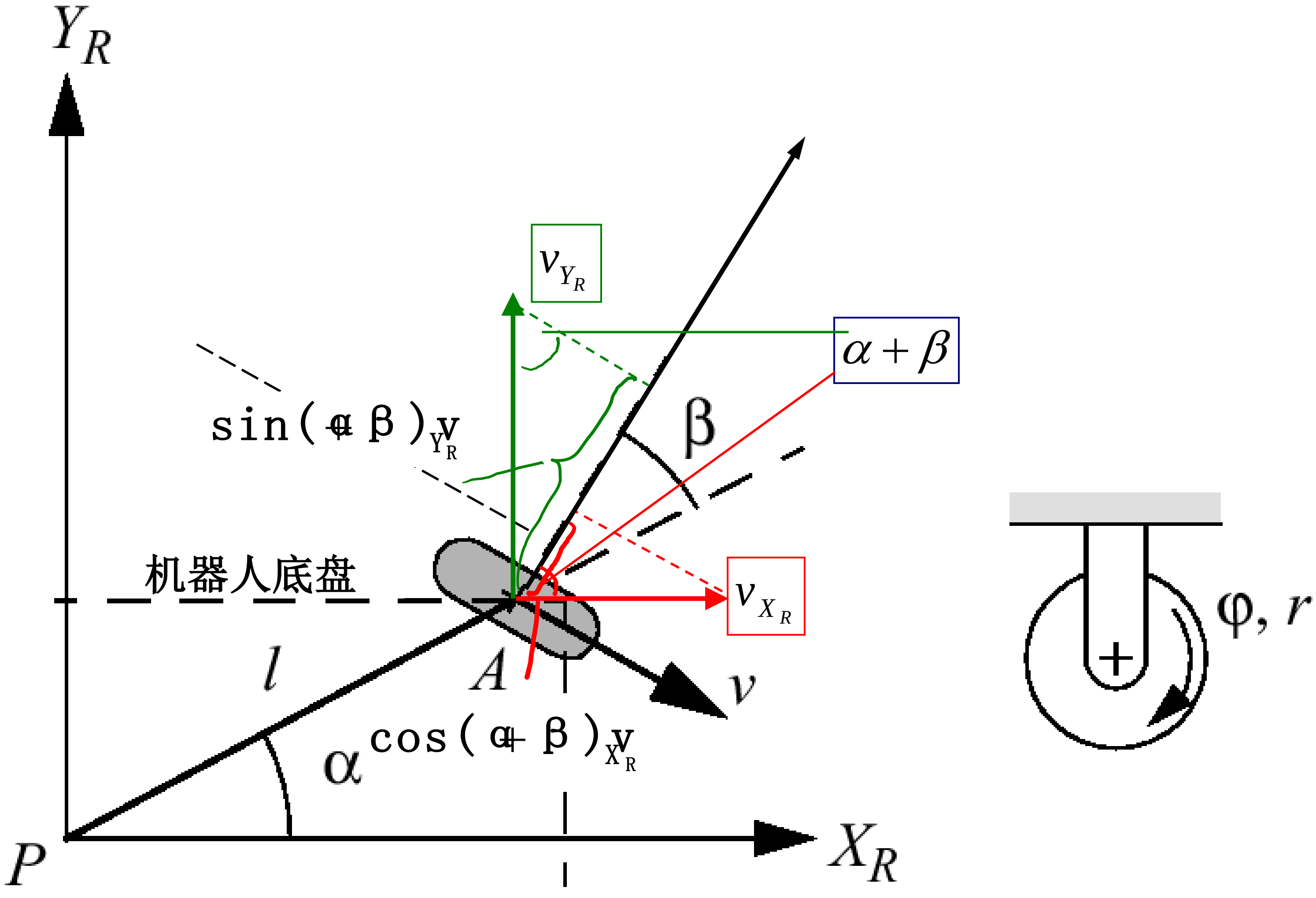
$$\left[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$$

◇ 得到对车辆在惯性系下速度的一个约束方程（滚动约束方程）。



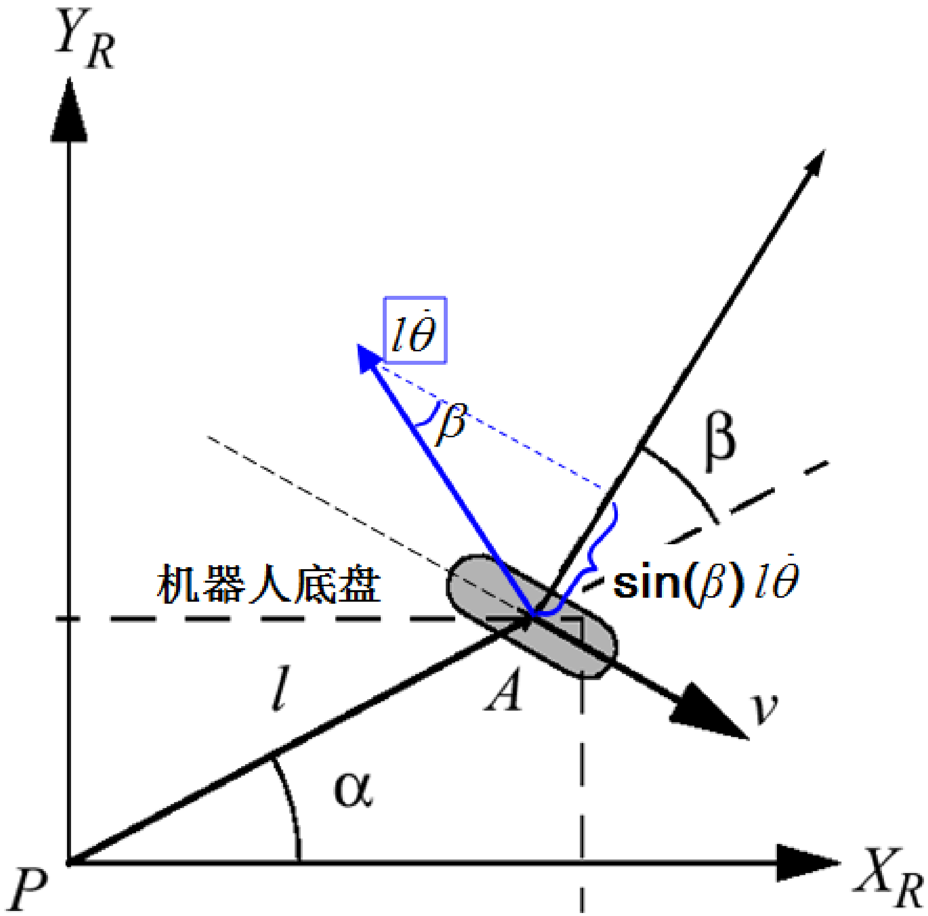
轮子运动学约束：

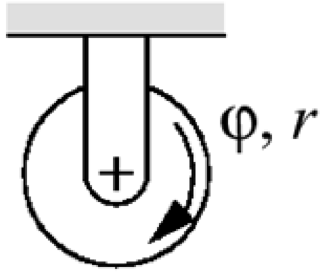
固定的标准轮—本体系速度折算为与轮平面 v垂直的速度



轮子运动学约束：

固定的标准轮—本体系速度折算为与轮平面 v垂直的速度





轮子运动学约束：

固定的标准轮

◇ 将本体系速度折算为与轮平面 v 方向垂直的速度，即：

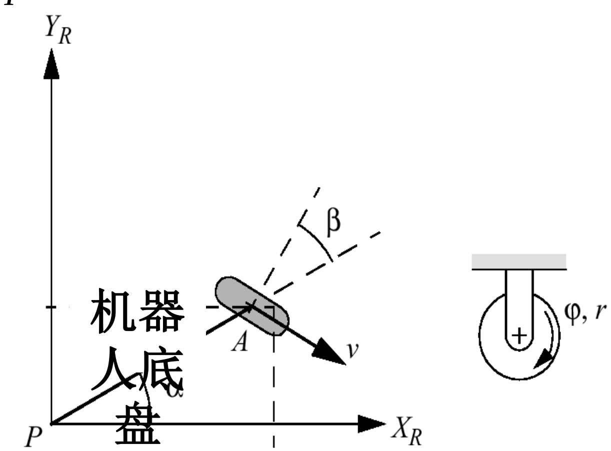
$$\cos(\alpha+\beta)v_{x_R}+\sin(\alpha+\beta)v_{y_R}+l\sin\beta\dot{\theta}=0$$

◇ 或

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin\beta\end{bmatrix}\dot{\xi}_R=0$$

$$OR$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin\beta\end{bmatrix}R(\theta)\dot{\xi}_I=0$$



◇ 得到对车辆在惯性系下速度的另一个约束方程（滑动约束方程）。

例

$$\left[\sin(\alpha+\beta)\;\; -\cos(\alpha+\beta)\;\; (-l)\cos\beta\right] R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} \;=\; 0$$

$$\left[\cos(\alpha+\beta)\;\; \sin(\alpha+\beta)\;\; l\sin\beta\right] R(\theta)\dot{\xi}_I \;=\; 0$$

- 设轮 A 所处位置使

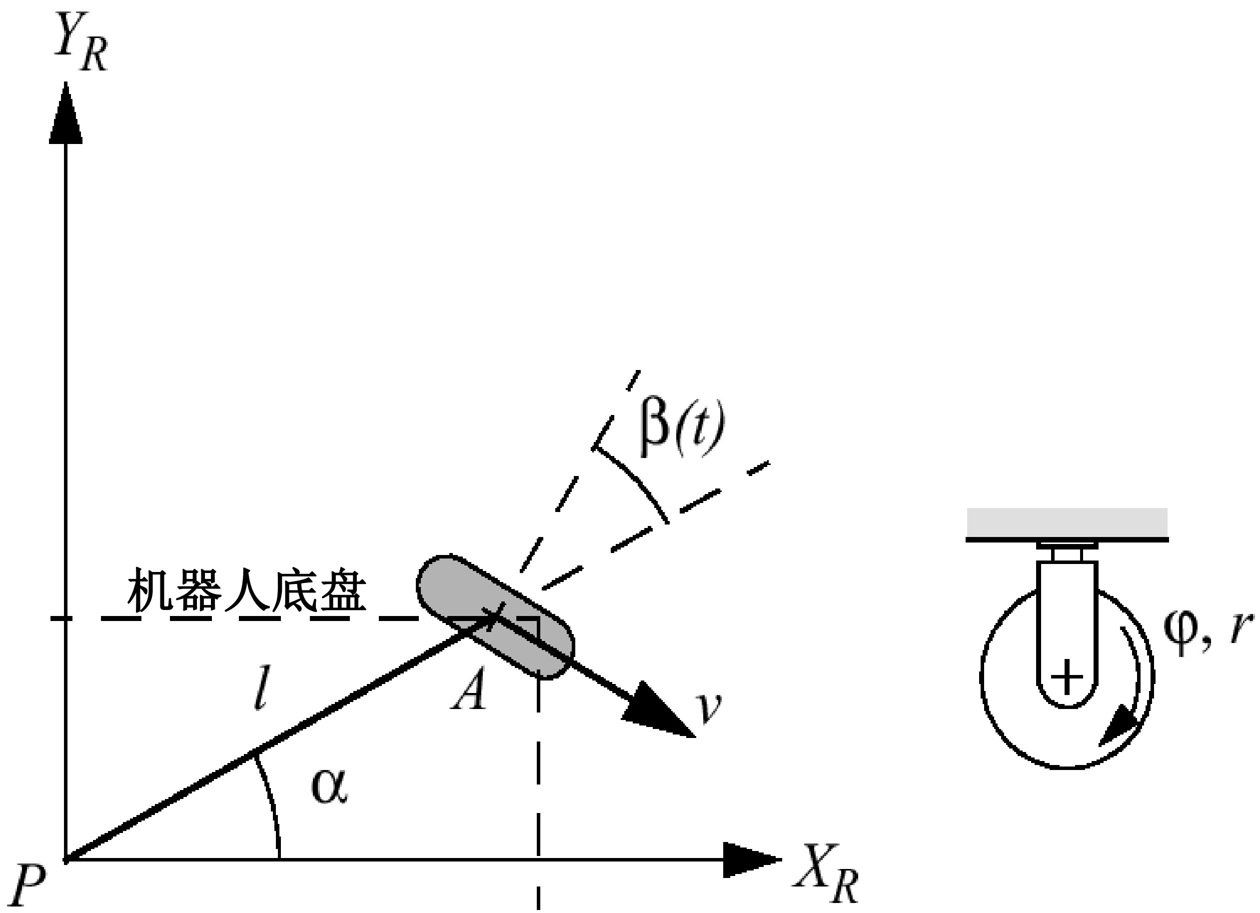
$$\alpha = 0 \text{ 和 } \beta = 0$$

- 这导致轮子的接触点位于X_R轴上，同时轮子的平面与Y_R平行。如 $\theta = 0$, 则滑动约束可简化为：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{\theta}\end{bmatrix} = 0$$

轮子运动学约束：

受操纵的标准轮



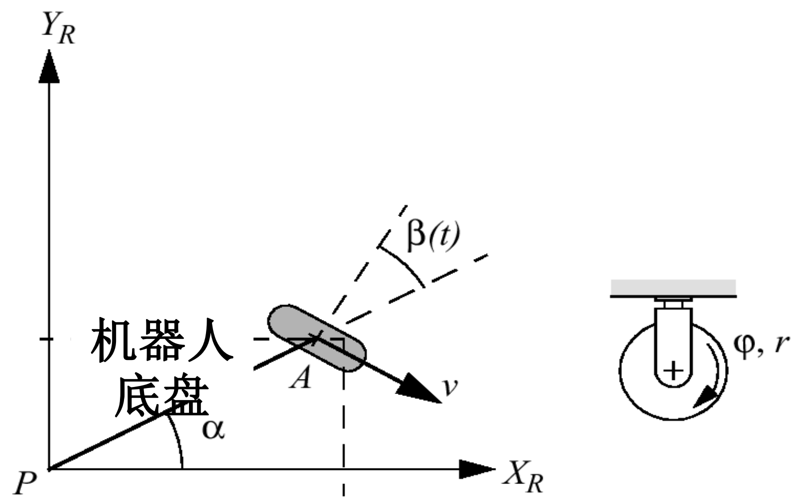
轮子运动学约束：

受操纵的标准轮

◇ 滚动和滑动约束方程形式不变，不过 β 成为操纵变量

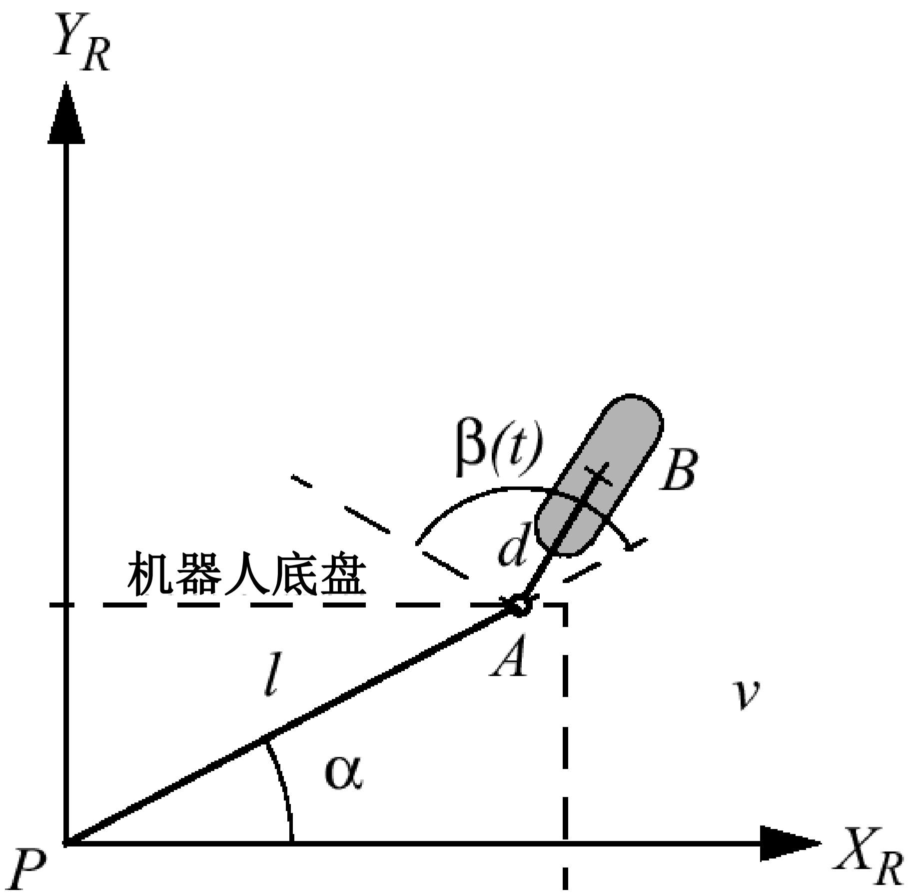
$$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos\beta\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0$$

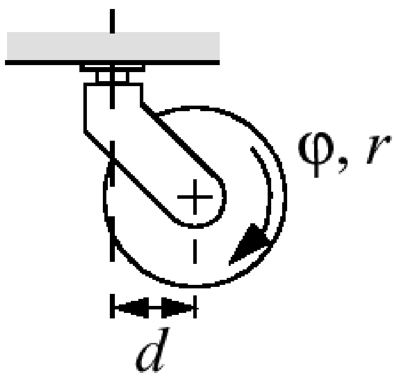
$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin\beta\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$



轮子运动学约束：

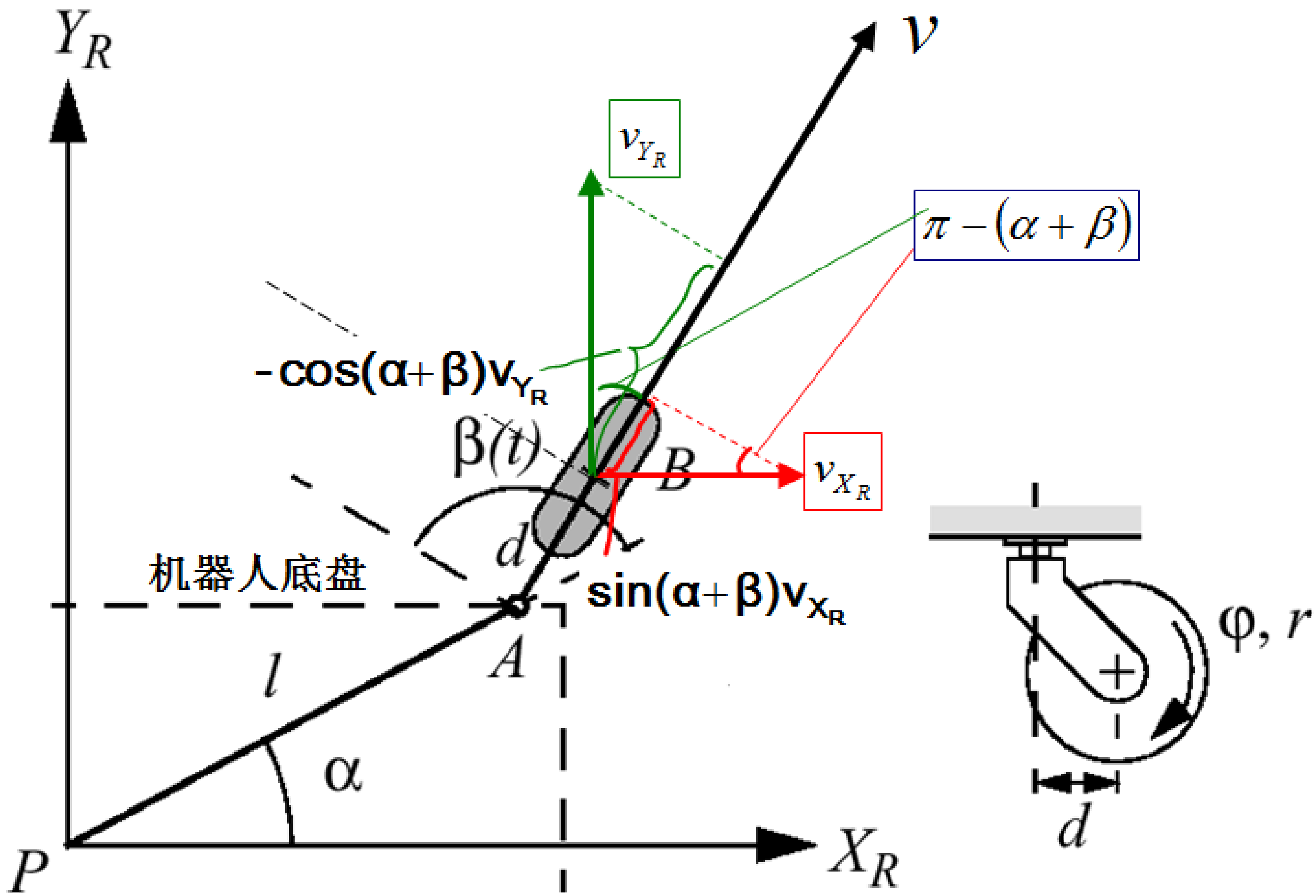
小脚轮





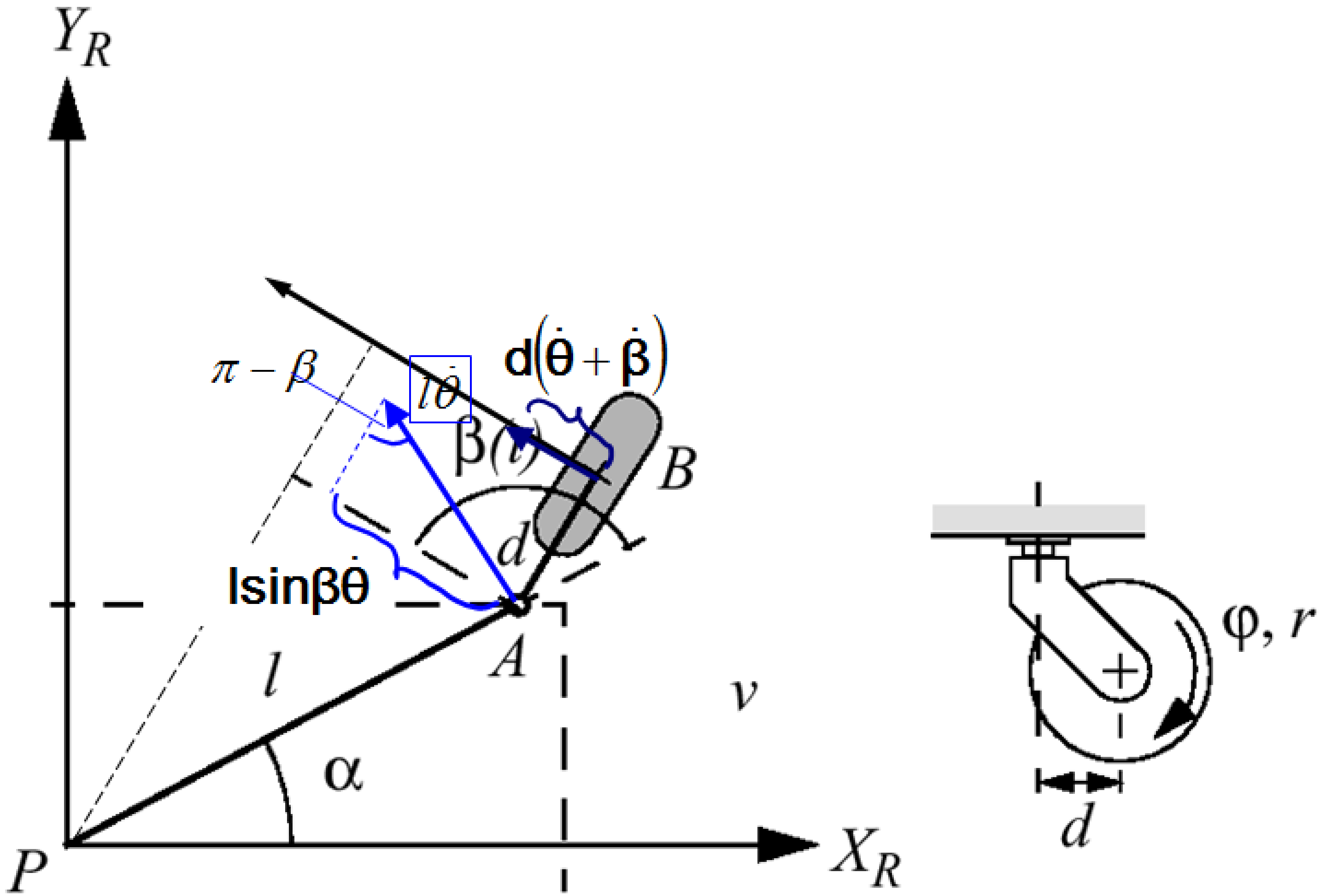
轮子运动学约束：

小脚轮—本体系速度折算为沿轮平面 v 方向的速度



轮子运动学约束：

小脚轮—本体系和脚轮角速度折算为与轮平面垂直的速度



轮子运动学约束：

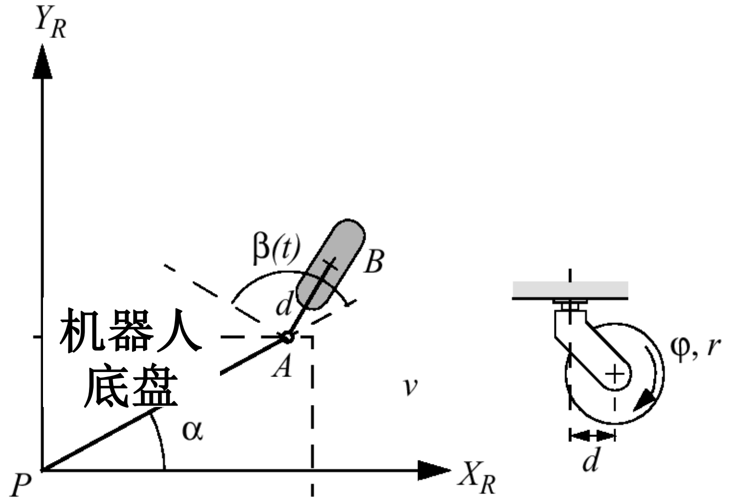
小脚轮

◈ 滚动约束方程形式不变，$\boldsymbol{\beta}$ 也是时间变量

$$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & -l\cos\beta\end{bmatrix}R(\theta)\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$$

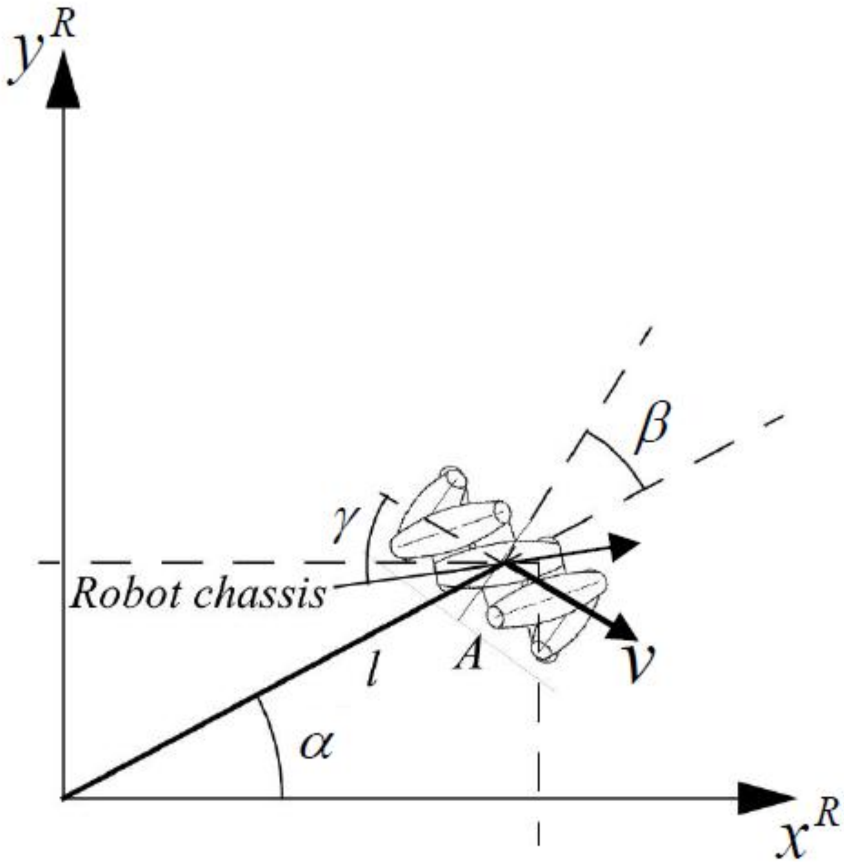
◈ 滑动约束中要考虑转速 $\dot{\beta}$

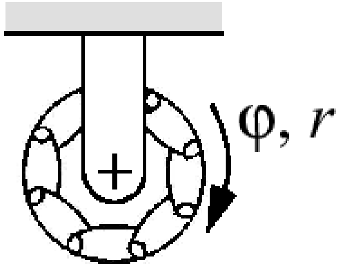
$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & d+l\sin\beta\end{bmatrix}R(\theta)\dot{\xi}_I + d\dot{\beta} = 0$$



轮子运动学约束：

瑞典轮





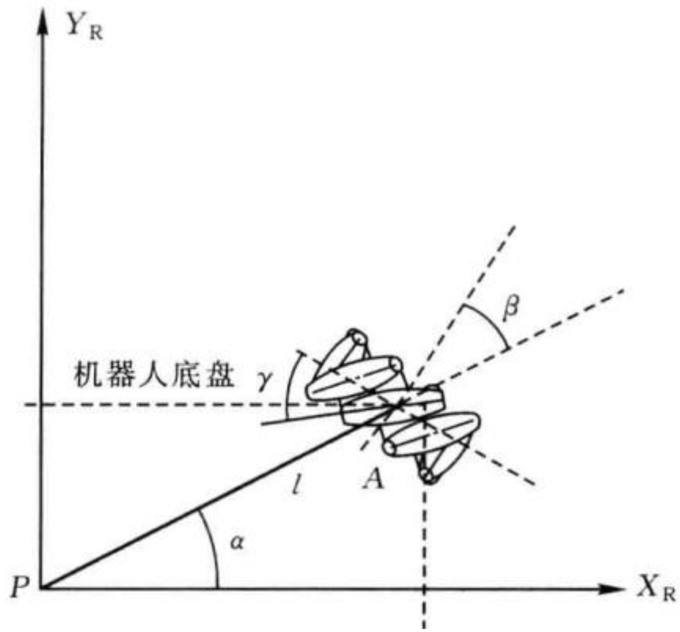
轮子运动学约束：

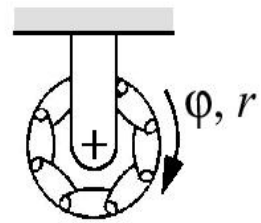
瑞典轮

◇ 滚动约束方程，要考虑沿小轮轴面（不是大轮平面）

$$[\sin(\alpha+\beta+\gamma) \quad -\cos(\alpha+\beta+\gamma) \quad -l\cos(\beta+\gamma)]R(\theta)\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}\cos\gamma$$

◇ 没有滑动约束





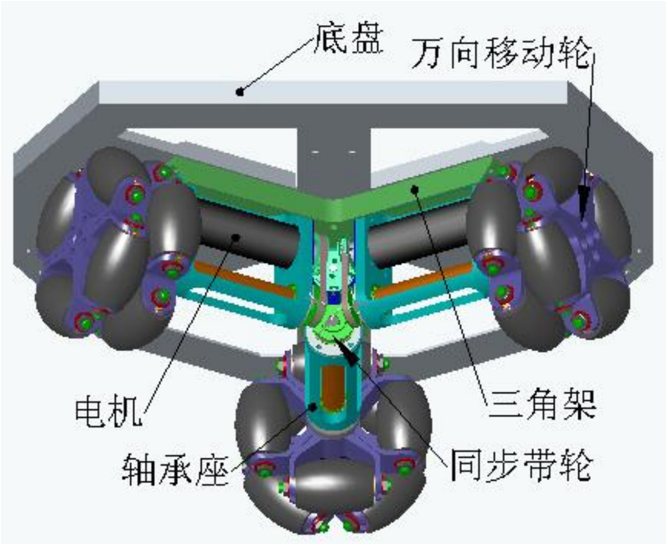
轮子运动学约束：

瑞典轮

- 对于 $\gamma=0$ 的情况（如图），滚动约束方程与固定标准轮的相同

$$\left[\sin(\alpha+\beta)\quad -\cos(\alpha+\beta)\quad -l\cos(\beta)\right]R(\theta)\dot{\xi}_I=r\dot{\varphi}$$

- 但与固定标准轮的相比，没有滑动约束
- 例：

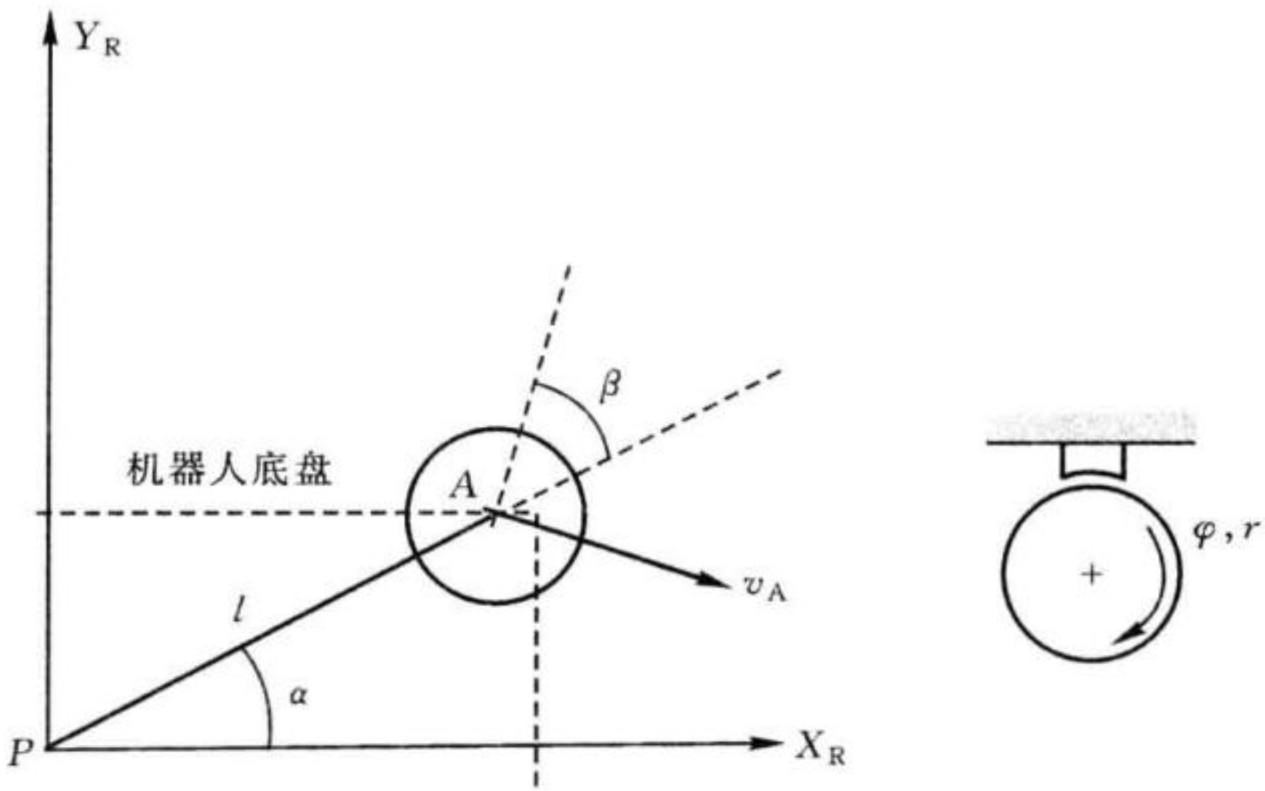


轮子运动学约束：

瑞典轮

轮子运动学约束：

球形轮



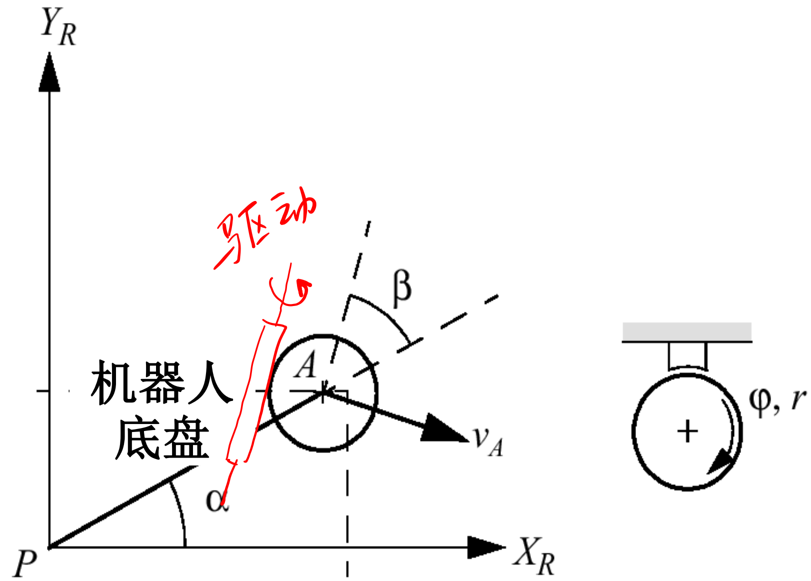
轮子运动学约束：

球形轮

- 驱动辊子速度只与 v_A 有关，所以滚动约束与固定标准轮的相同

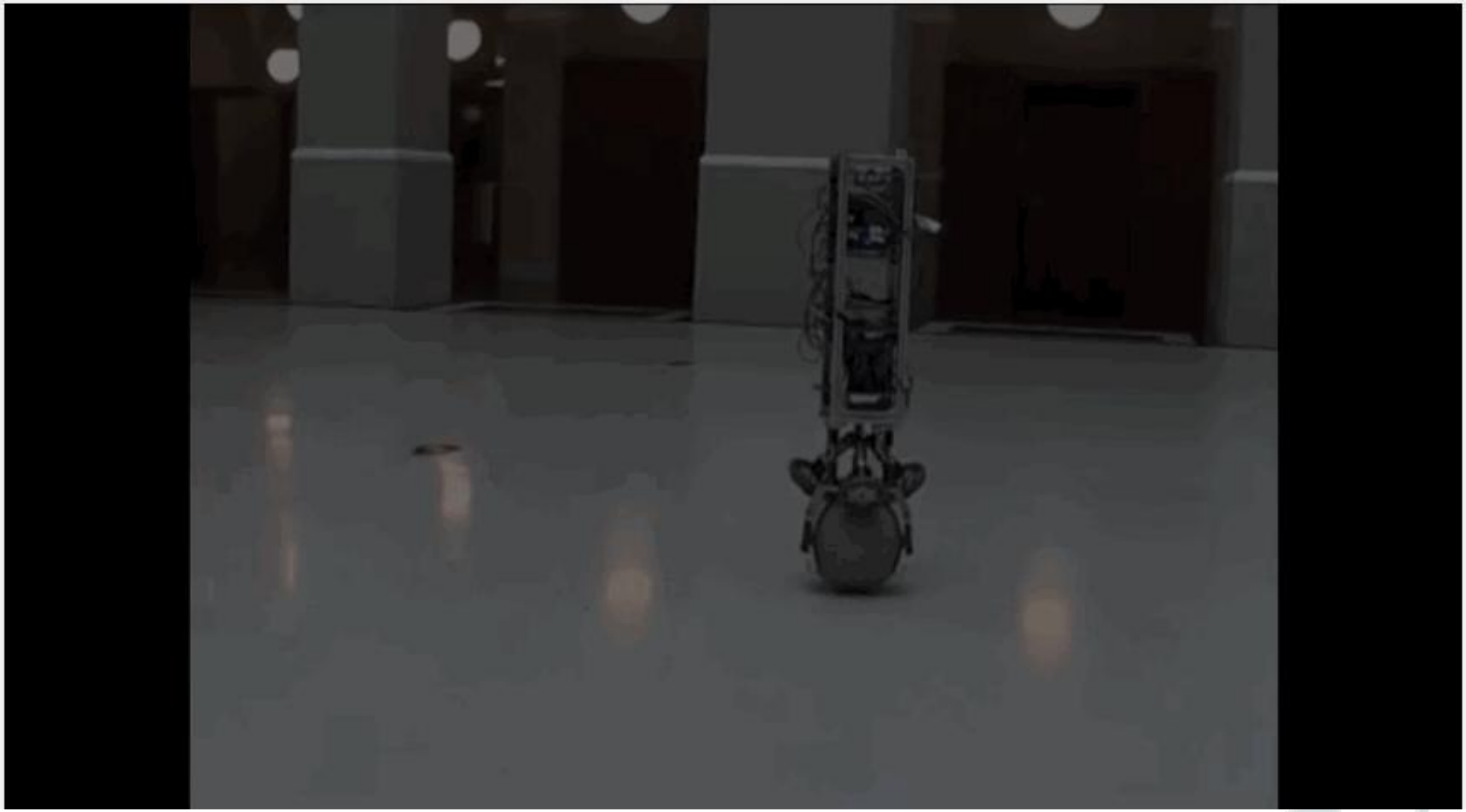
$$\begin{bmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & -l\cos(\beta)\end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$$

- 滑动约束与固定标准轮相同



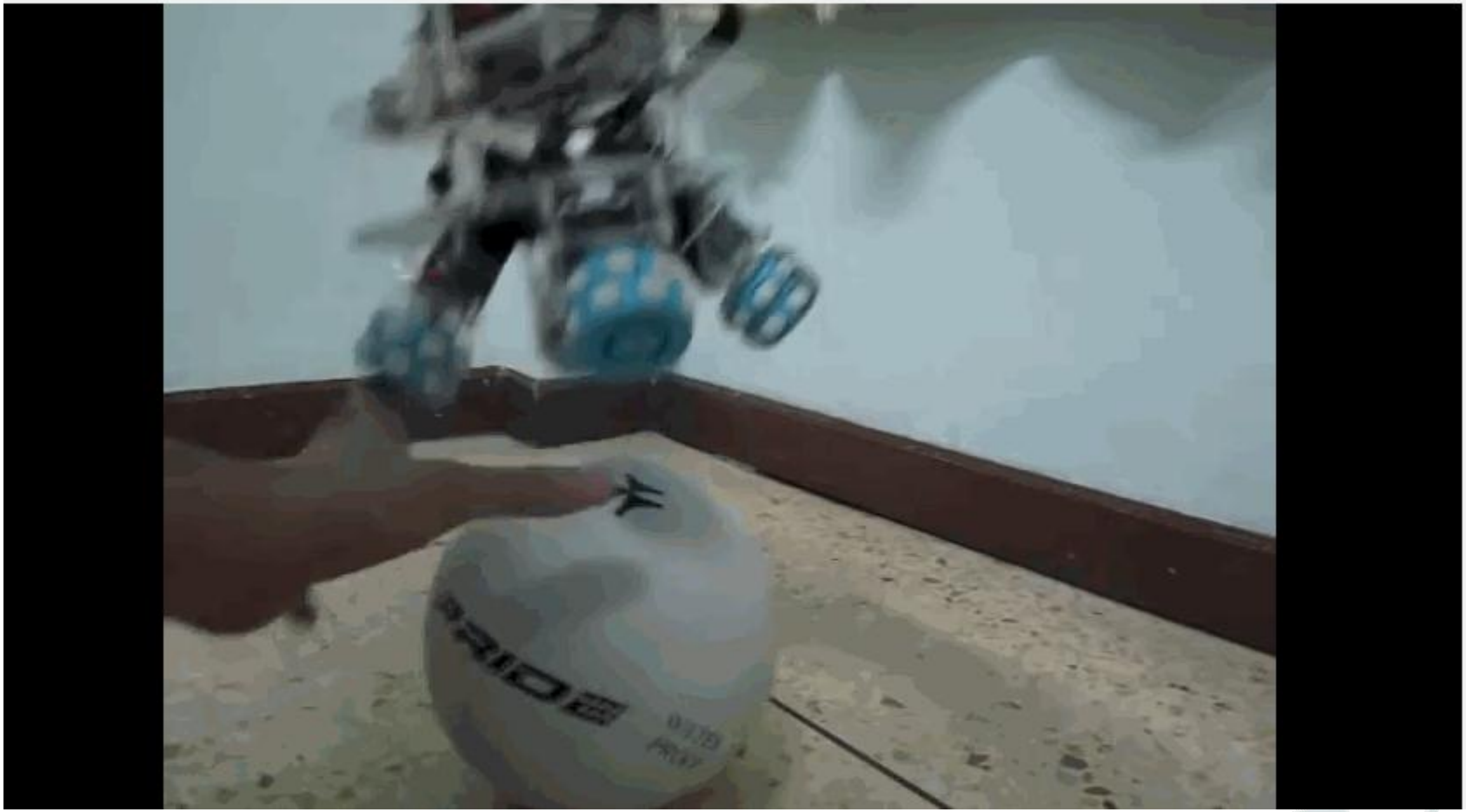
轮子运动学约束：

球形轮



轮子运动学约束：

球形轮



机器人运动学约束

- 给定一个具有*M*个轮子的机器人
  - 各轮对机器人运动具有零个或多个约束
  - 仅固定标准轮或受操纵标准轮，对机器人运动有约束
- 考虑到不同轮的组合时，机器人的机动性如何？
- 设有总数为 $N=N_f+N_s$ 个标准轮（ N_f 固定轮数； N_s可操纵轮数）
  - 可以推导得出矩阵形式的约束方程：
  - 滚动约束

$$J_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I + J_2\dot{\varphi} = 0$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}_{(N_f+N_s)\times 1} \qquad J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}_{(N_f+N_s)\times 3} \qquad J_2 = diag(r_1 \cdots r_N)$$

  - 滑动约束

$$C_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

$$C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}_{(N_f+N_s)\times 3}$$

例：差动驱动机器人

◇ 左轮对机器人的滚动约束和滑动约束：

$$\sin(\frac{\pi}{2})v_{x_R}-\cos(\frac{\pi}{2})v_{y_R}-l\cos 0\dot{\theta}=v_{x_R}-l\dot{\theta}=r\dot{\varphi}_1$$

$$\cos(\frac{\pi}{2})v_{x_R}+\sin(\frac{\pi}{2})v_{y_R}+l\sin 0\dot{\theta}=v_{y_R}=0$$

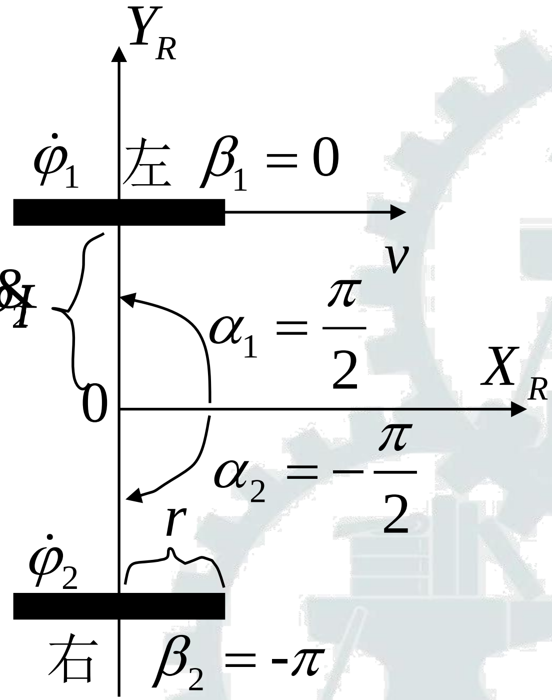
◇ 右轮对机器人的滚动约束和滑动约束：

$$\sin(-\frac{3\pi}{2})v_{x_R}-\cos(-\frac{3\pi}{2})v_{y_R}-l\cos(-\pi)\dot{\theta}=v_{x_R}+l\dot{\theta}=r\dot{\varphi}_2$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2})v_{x_R}+\sin(-\frac{3\pi}{2})v_{y_R}+l\sin(-\pi)\dot{\theta}=v_{y_R}=0$$

◇ 得：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -l\\ 1 & 0 & l\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\dot{\xi}_R=\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{bmatrix}$$



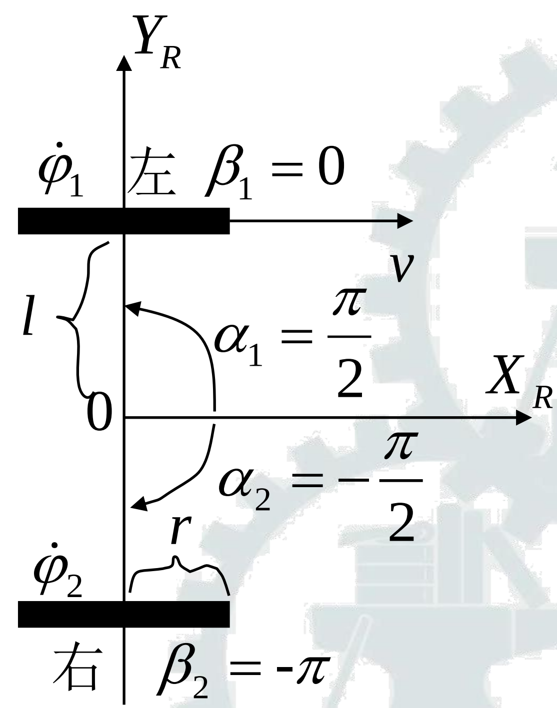
例：差动驱动机器人（正向运动学）

◈ 或（已知两轮转速，求解机器人本体系下的速度和角速度）：

$$\dot{\xi}_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & -l\\ 1 & 0 & l\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{bmatrix}$$

◈ 或（已知两轮转速，求解机器人惯性系下的速度和角速度）：

$$\dot{\xi}_I=R^{-1}(\theta)\begin{bmatrix}1 & 0 & -l\\ 1 & 0 & l\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{bmatrix}$$



差动驱动机器人，轴安装不正有什么关系？

- 左轮对机器人的滚动约束和滑动约束：

$$\sin(\frac{\pi}{2})v_{x_R}-\cos(\frac{\pi}{2})v_{y_R}-l\cos 0\dot{\theta}=v_{x_R}-l\dot{\theta}=r\dot{\varphi}_1$$

$$\cos(\frac{\pi}{2})v_{x_R}+\sin(\frac{\pi}{2})v_{y_R}+l\sin 0\dot{\theta}=v_{y_R}=0$$

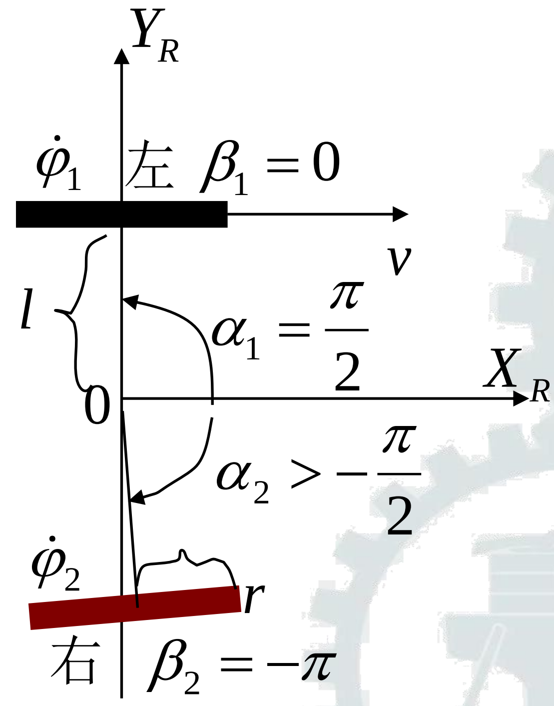
- 右轮对机器人的滚动约束和滑动约束：

$$\sin(|\alpha_2|)v_{x_R}-\cos(|\alpha_2|)v_{y_R}-l\cos\pi\dot{\theta}=r\dot{\varphi}_2$$

$$\cos(|\alpha_2|)v_{x_R}+\sin(|\alpha_2|)v_{y_R}+l\sin\pi\dot{\theta}=v_{y_R}=0$$

- 得：

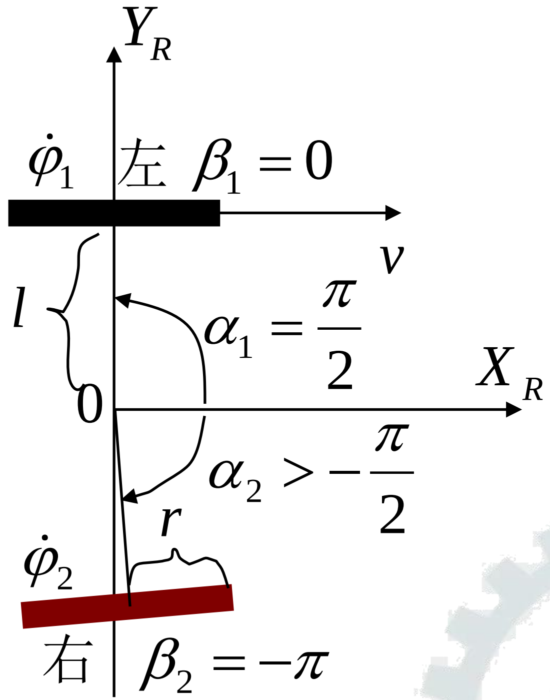
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -l \\ 0.98 & 0.17 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.17 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}\dot{\xi}_R=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$



差动驱动机器人，轴安装不正有什么关系？

◈ 提出子关系式：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.17 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{x_R} \\ v_{y_R} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{x_R} \\ v_{y_R} \end{bmatrix} = 0$$



◈ 不能移动！

例：两轮机器人（自行车）

- 后轮：固定标准轮；前轮：操纵标准轮（操纵角 $\boldsymbol{\beta}$ ）
- 后轮的滚动约束和滑动约束：

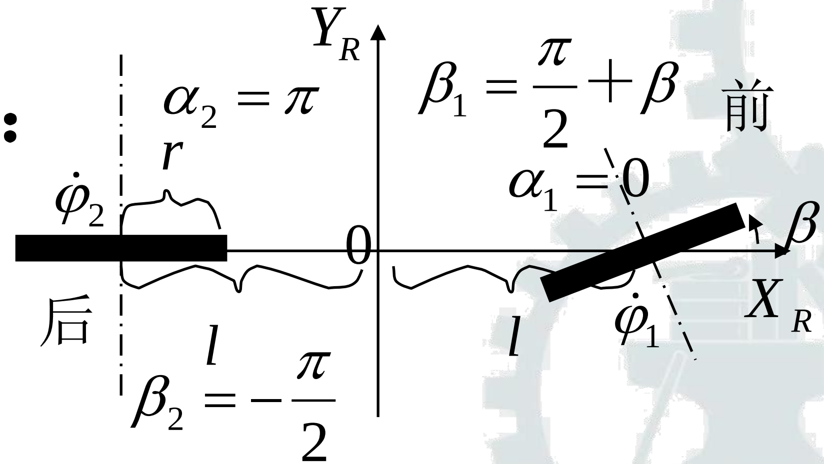
$$\sin(\frac{\pi}{2})v_{x_R} - \cos(\frac{\pi}{2})v_{y_R} - l\cos(-\frac{\pi}{2})\dot{\theta} = v_{x_R} = r\dot{\varphi}_2$$

$$\cos(\frac{\pi}{2})v_{x_R} + \sin(\frac{\pi}{2})v_{y_R} + l\sin(-\frac{\pi}{2})\dot{\theta} = v_{y_R} - l\dot{\theta} = 0$$

- 前轮没有滚动约束；滑动约束为：

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\beta)v_{x_R} + \sin(\frac{\pi}{2}+\beta)v_{y_R} + l\sin(\frac{\pi}{2}+\beta)\dot{\theta}$$

$$= -\sin\beta v_{x_R} + \cos\beta v_{y_R} + l\cos\beta\dot{\theta} = 0$$



例：两轮机器人（自行车）

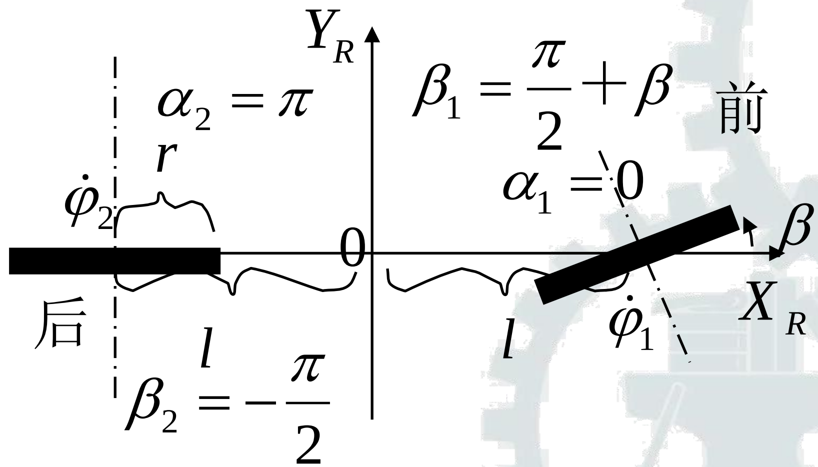
◈ 总体：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l \\ -\sin\beta & \cos\beta & l\cos\beta \end{bmatrix} \dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2$$

◈ 或（已知后轮转速和前轮角度，求解机器人 本体系/惯性系 下的速度和角速度）：

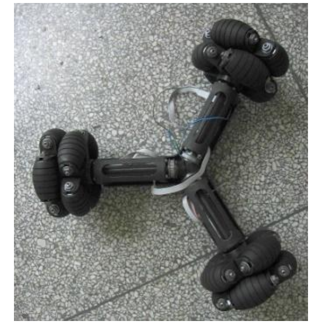
$$\dot{\xi}_R = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l \\ -\sin\beta & \cos\beta & l\cos\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2$$

$$\dot{\xi}_I = rR^{-1}(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l \\ -\sin\beta & \cos\beta & l\cos\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2$$



例：全向机器人

◇ 设如图所示的瑞典论，$\gamma = 0$。三个滚动约束分别为：

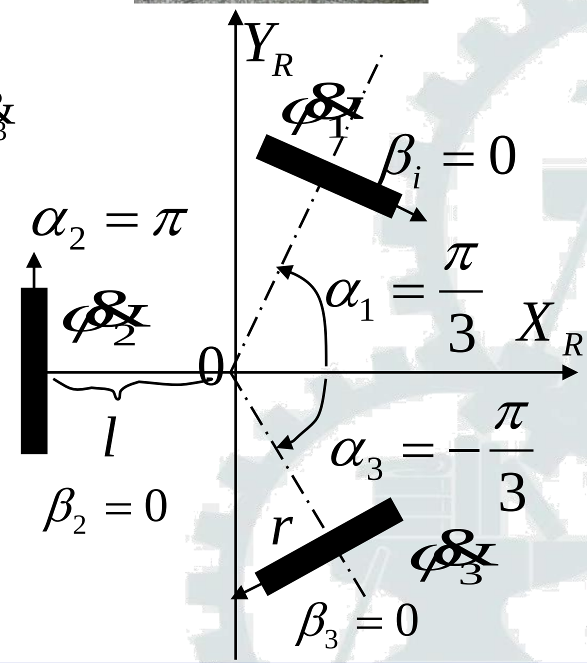


$$\sin(\alpha_1+\gamma)v_{x_R} - \cos(\alpha_1+\gamma)v_{y_R} - l\dot{\theta}\cos(\beta_1+\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{x_R} - \frac{1}{2}v_{y_R} = r\dot{\varphi}_1$$

$$\sin(\alpha_2+\gamma)v_{x_R} - \cos(\alpha_2+\gamma)v_{y_R} - l\dot{\theta}\cos(\beta_2+\gamma) = v_{y_R} = r\dot{\varphi}_2$$

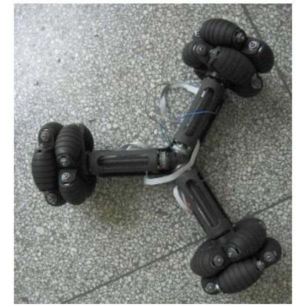
$$\sin(\alpha_3+\gamma)v_{x_R} + \cos(\alpha_3+\gamma)v_{y_R} - l\dot{\theta}\cos(\beta_3+\gamma) = \frac{1}{2}v_{x_R} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_{y_R} = r\dot{\varphi}_3$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l \\ 0 & 1 & -l \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l \end{bmatrix} \dot{\xi}_R = r \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$



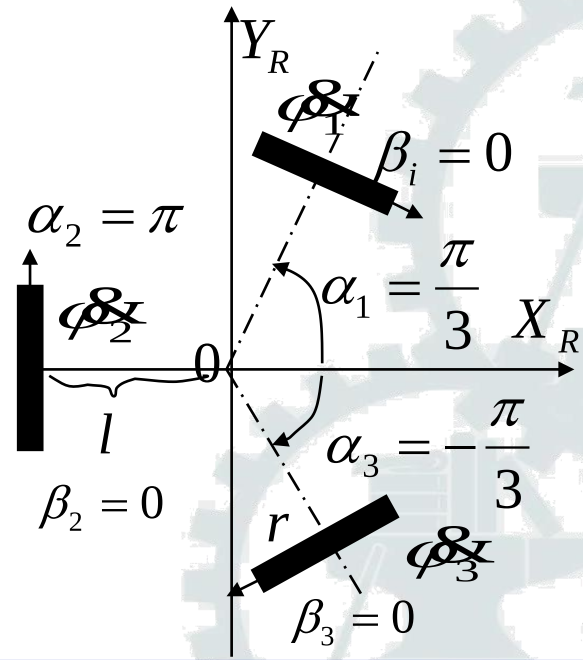
例：全向机器人

◈ 或（已知三轮转速，求解机器人 本体系/惯性系下的速度和角速度）：



$$\dot{\xi}_R = r\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l \\ 0 & 1 & -l \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\xi}_I = rR^{-1}(\theta)\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3l} & -\frac{1}{3l} & -\frac{1}{3l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$



移动机器人的机动性

- 移动机器人的机动性（活动能力）是以下联合的结果
  - 受滑动限制后的可用活动性
  - 以及由操纵标准轮所提供的附加自由度

- 使用前面的公式可以推导
  - 活动性程度 δ_m
  - 可操纵度 δ_s
  - 机器人机动性 $\delta_M = \delta_m + \delta_s$

移动机器人机动性：活动性程度

- 为防止任何横向滑动，运动向量 $R(\theta)\dot{\xi}_I$必须满足下列约束条件：

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

$$C_{1s}(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

$$C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}$$

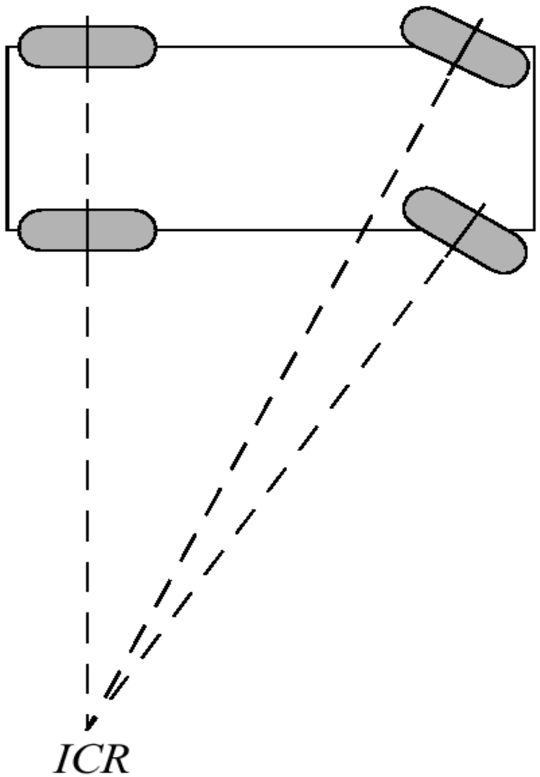
- 在数学上，
  - $R(\theta)\dot{\xi}_I$ 必须属于投影矩阵 $C_1(\beta_s)$的零空间。
  - 设$C_1(\beta_s)$的零空间为 N，对 N 中的任意向量 n，有

$$C_1(\beta_s)\cdot n = 0$$

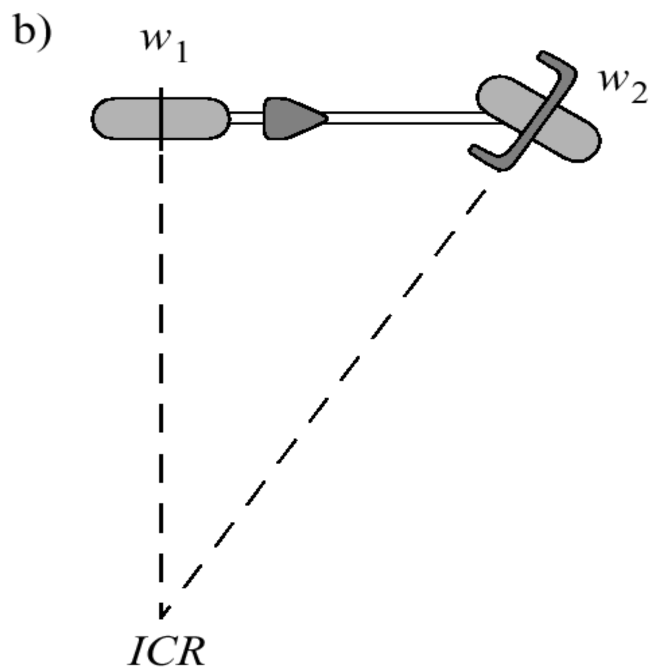
  - 几何上，这也可以用 瞬时转动中心 (ICR)概念证明

移动机器人机动性：转动瞬时中心

◇ **Ackermann 操纵**



自行车



移动机器人机动性：转动瞬时中心

- 将**ICR**设为机器人本体的瞬时坐标系原点，注意到 β_i 都为 **0**，则对每个轮的滑动约束为：

$$\left[\cos(\alpha_i+\beta_i) \quad \sin(\alpha_i+\beta_i) \quad l\sin\beta_i\right]\dot{\xi}_R = \left[\cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad 0\right]\dot{\xi}_R = 0$$

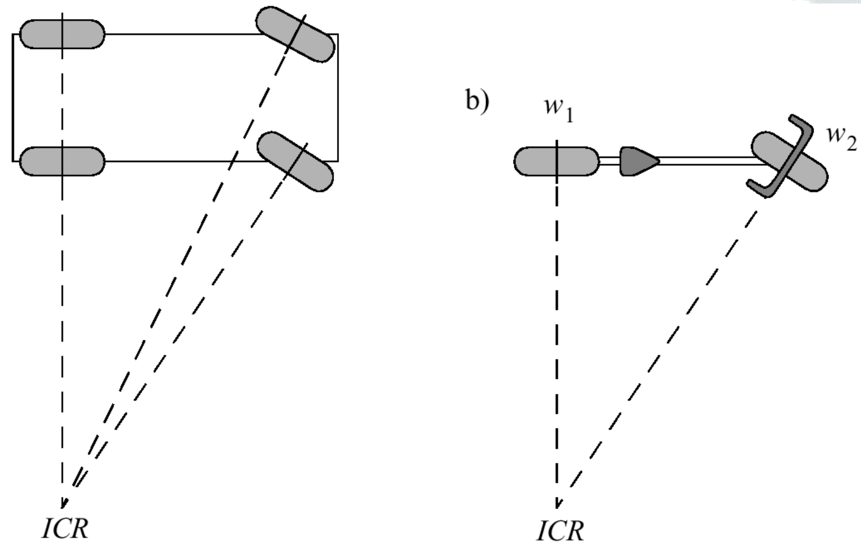
- 从而可允许一种运动形式：

$$v_{x_R} = v_{y_R} = 0$$

$$\dot{\theta} = \text{任意}$$

即，以**ICR**为中心的旋转运动。

- 只要其中有一个 β_i 不是 **0**，一般只能 $\dot{\theta}=0$，机器人不能动！



移动机器人机动性：活动性程度（续）

- 机器人底盘运动学是一组*独立约束*的函数

$$rank\left[C_1(\beta_s)\right]$$

  - $C_1(\beta_s)$ 的秩越大，机器人的活动性就越受限制 (零空间维数越小)

- 在数学上 $\delta_m = \dim N\left[C_1(\beta_s)\right] = 3 - rank\left[C_1(\beta_s)\right]$ $\quad 0 \le rank\left[C_1(\beta_s)\right] \le 3$
    - 无标准轮 $\quad rank\left[C_1(\beta_s)\right] = 0$
    - 所有方向受限 $\quad rank\left[C_1(\beta_s)\right] = 3$
- 例：
  - 单轮脚踏车：一个固定的标准轮
  - 差动驱动：两个固定标准轮
    - 两轮同轴
    - 两轮不同轴

移动机器人机动性：可操纵度

- 可操纵度对运动的影响是间接的

$$\delta_s = rank\left[C_{1s}(\beta_s)\right]$$

  - 在任何时刻，特殊转向影响一个运动学约束
  - 然而，改变转向的能力可以产生附加的机动性
- 范围： δ_s $\quad 0 \le \delta_s \le 2$
- 例：
  - 一个操纵轮：三轮车
  - 两个操纵轮：没有固定的标准轮
  - 汽车 (Ackermann 操纵): $N_f = 2$, $N_s=2$ 。但两个固定轮同轴，所以

$rank\left[C_{1f}\right]=1$ ；两个操纵轮也同轴，所以 $rank\left[C_1(\beta_s)\right]=0$ ，

即：

$$\delta_m = 1,\quad \delta_s = 1$$

移动机器人机动性：机器人机动性

- 机动程度=活动性程度＋可操纵度

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

  - δ_M 相同的机器人是否一定相同？
  - 对任意 $\delta_M = 2$ 的机器人，ICR(瞬时转动中心) 总是被限制在一条直线上
  - 而对 $\delta_M = 3$ 的机器人，ICR 没有限制，可以设置在平面上的任何点。（如全向型机器人）

- 同步驱动例：

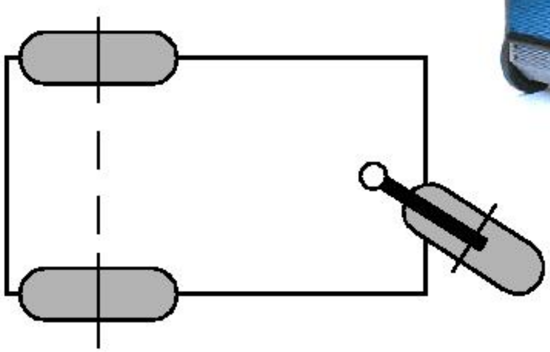
$$\delta_M = \delta_m + \delta_s = 1 + 1 = 2$$

移动机器人机动性：轮子配置

◈ 差动驱动

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s = 2 + 0$$

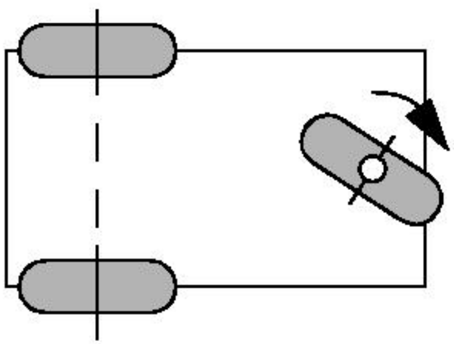
a)



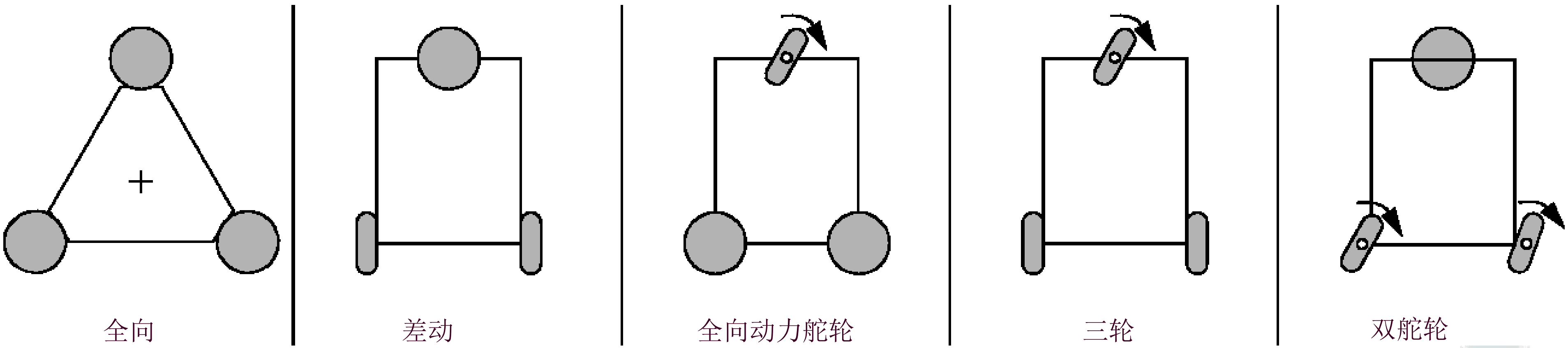
三轮车

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s = 1 + 1$$

b)

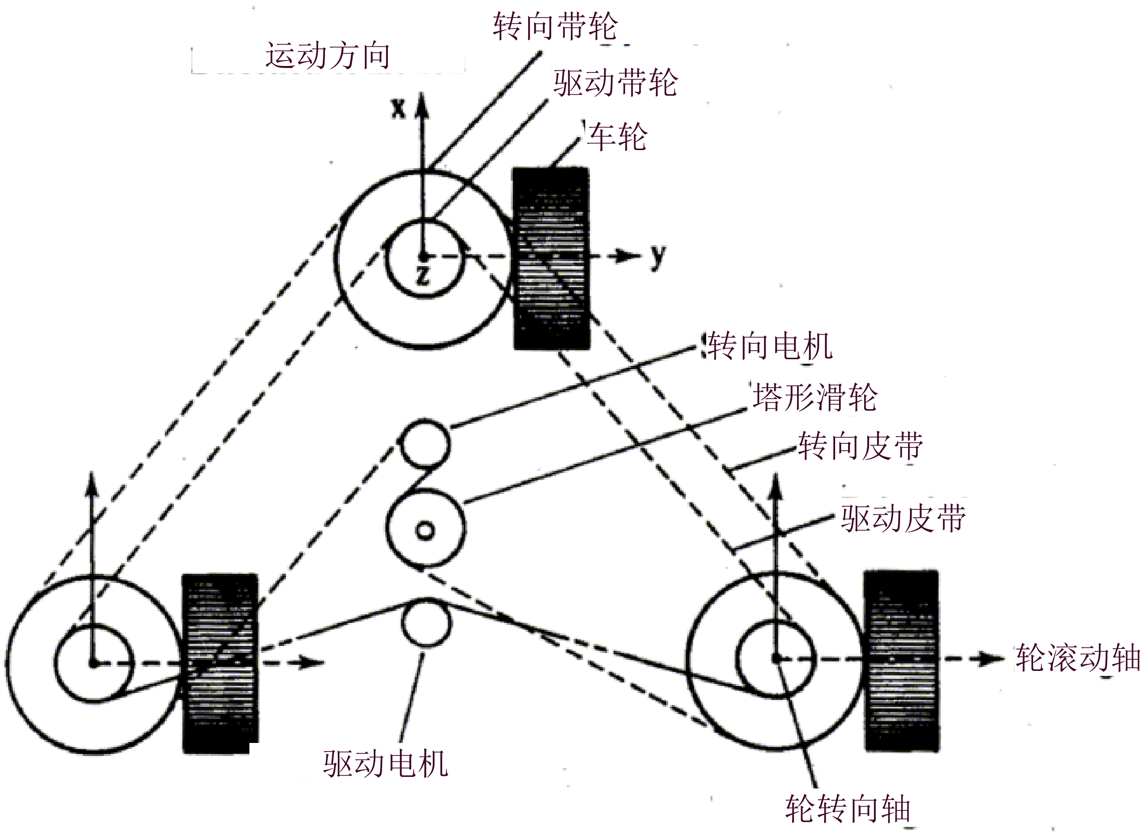


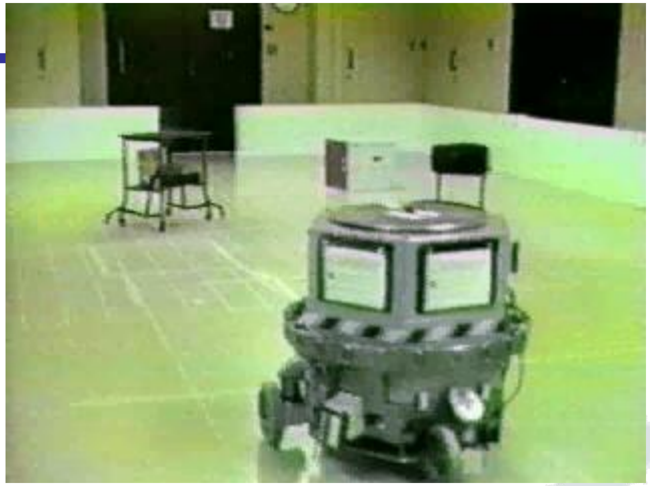
三轮配置的五种基本类型



同步驱动

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s = 1 + 1 = 2$$





移动机器人工作空间：自由度

- 机动性与车辆控制自由度相等
- 但是，在环境中车辆的自由度是什么？
  - 汽车例（控制自由度＝2，但汽车可以任意朝向到达平面上任一点，汽车自由度＝3！超过δ_M）
- 工作空间
  - 在工作空间中，机器人如何能够移动到不同位姿？
- 机器人的独立可达速度（维数）
  - 可微的自由度 (DDOF) = δ_m
  - 自行车: $\delta_M = \delta_m + \delta_s = 1+1$ **DDOF = 1; DOF=3**
  - 全向驱动: $\delta_M = \delta_m + \delta_s = 3+0$ **DDOF=3; DOF=3**

移动机器人工作空间：自由度，完整（Holonomy）

- **DOF** *自由度*:
  - 机器人达成不同姿态的能力（位置自由度）
- **DDOF** *可微的自由度*:
  - 机器人行走不同路径的能力（速度自由度）

$$DDOF \leq \delta_m \leq DOF$$

- 完整机器人：*一个完整机器人是没有非完整运动学约束的机器人*
  - 完整运动学约束可以被表示为仅是位置变量的显函数
  - 非完整运动学约束需要微分关系，比如位置变量的微分
  - 固定的和可操纵的标准轮产生非完整约束

移动机器人工作空间：自由度，完整（Holonomy）

- 非完整约束和非完整系统
- 一个力学系统在其系统内部以及系统和环境之间总是存在一些约束。
- 考虑一个有 ***n*** 个广义坐标 ***q*** 的机械系统，受到 ***m*** 个约束：

$$C(q,\dot{q})=0$$

如果该约束能够通过积分运算或非线性变换，化为 **$C(q)=0$** 的形式，则称这些约束条件为完整约束，该系统是一个完整约束系统；否则，这些约束条件为非完整约束，系统为非完整约束系统。

- 只要有标准轮，就有如下的运动约束条件，就是非完整系统。

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\xi}_I=0$$

$$C_{1s}(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I=0$$

移动机器人工作空间：

完整机器人例

- 自行车例
- 滑动约束

$$\left[\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad l\sin\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}_I = 0$$

约束不能化为仅与位置变量有关——非完整约束

- 但如果将操纵轮固定，轮轴与后轴平行。这样限制在直线上运行，不考虑滑动约束。滚动约束：

$$\left[\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad -l\cos\beta\right]R(\theta)\dot{\xi}_I = r\dot{\varphi}$$

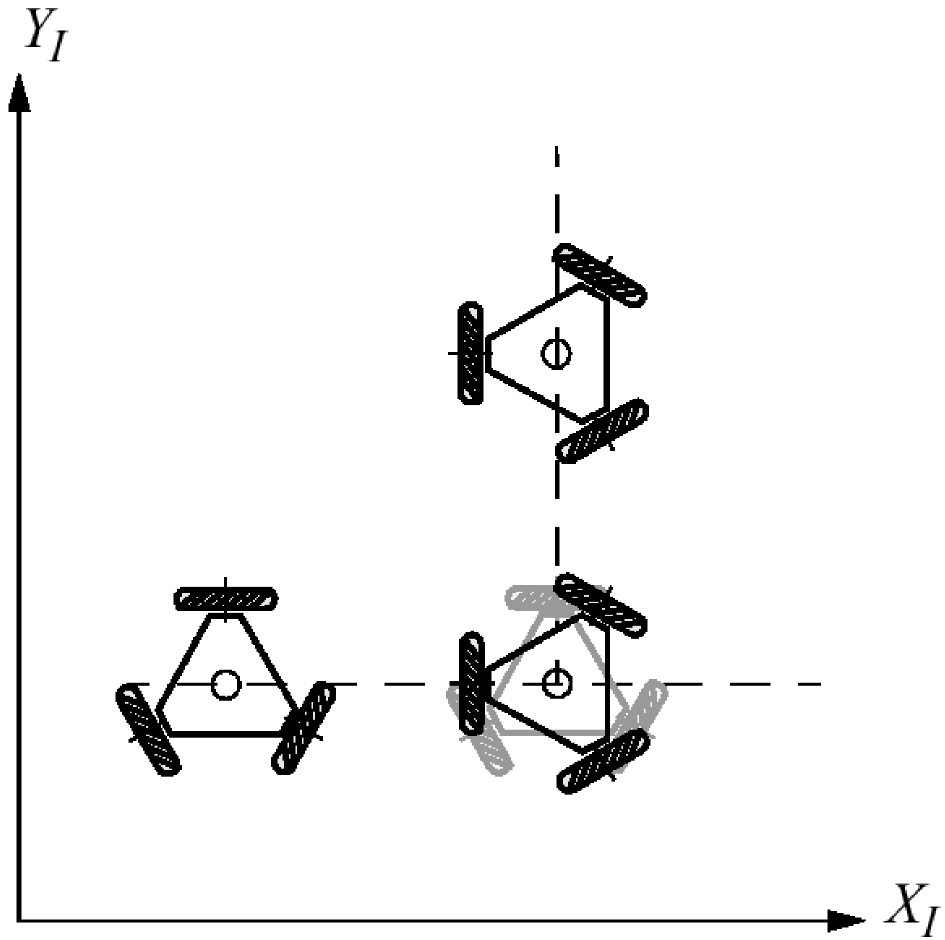
$$\Rightarrow v_x = r\dot{\varphi}$$

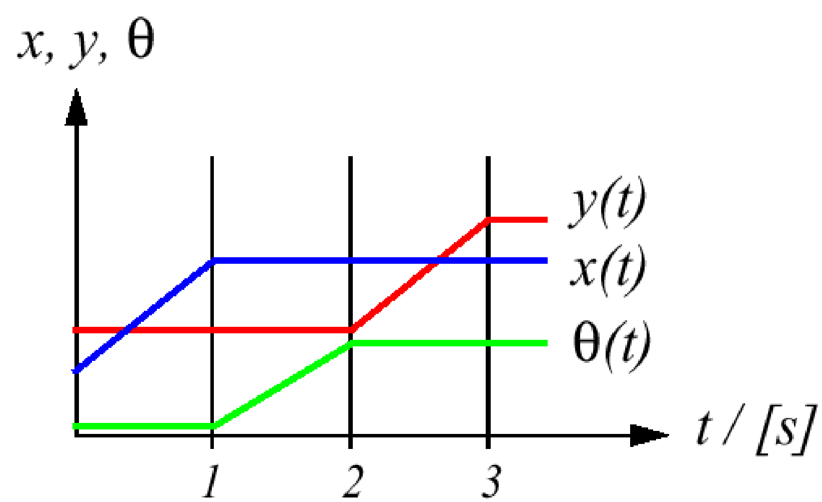
$$\Rightarrow x = x_0 + \varphi r$$

约束中不含速度变量——完整约束。

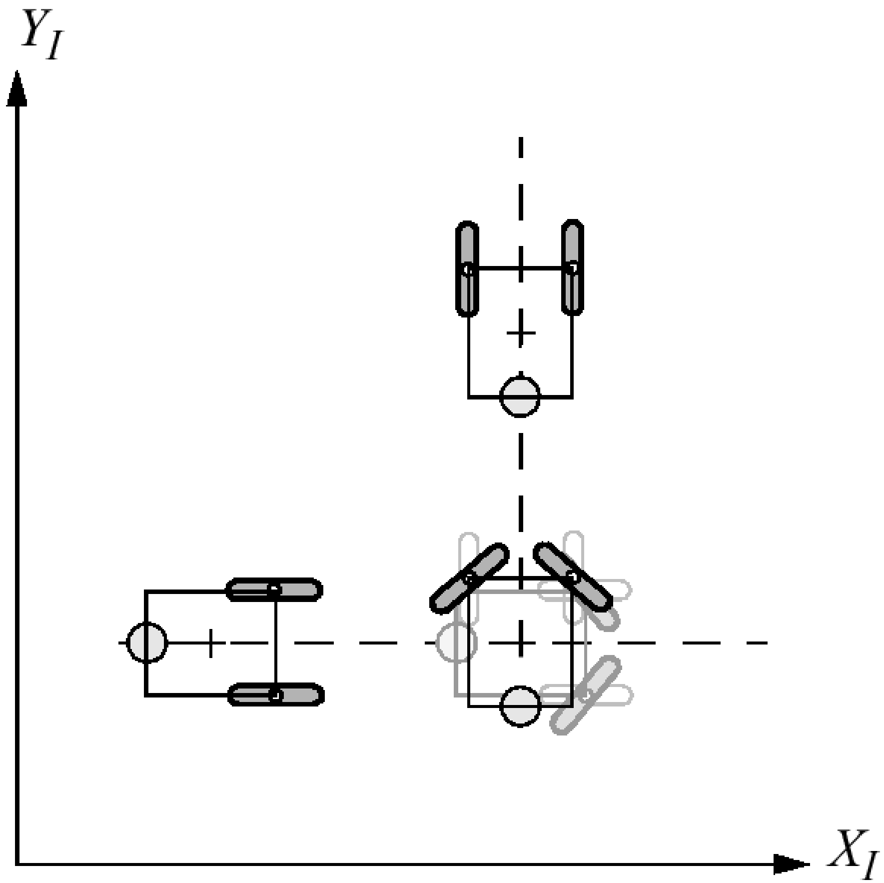
- 没有运动学约束的例。
- 全向机器人是一个 **DDOF=3** 的完整机器人

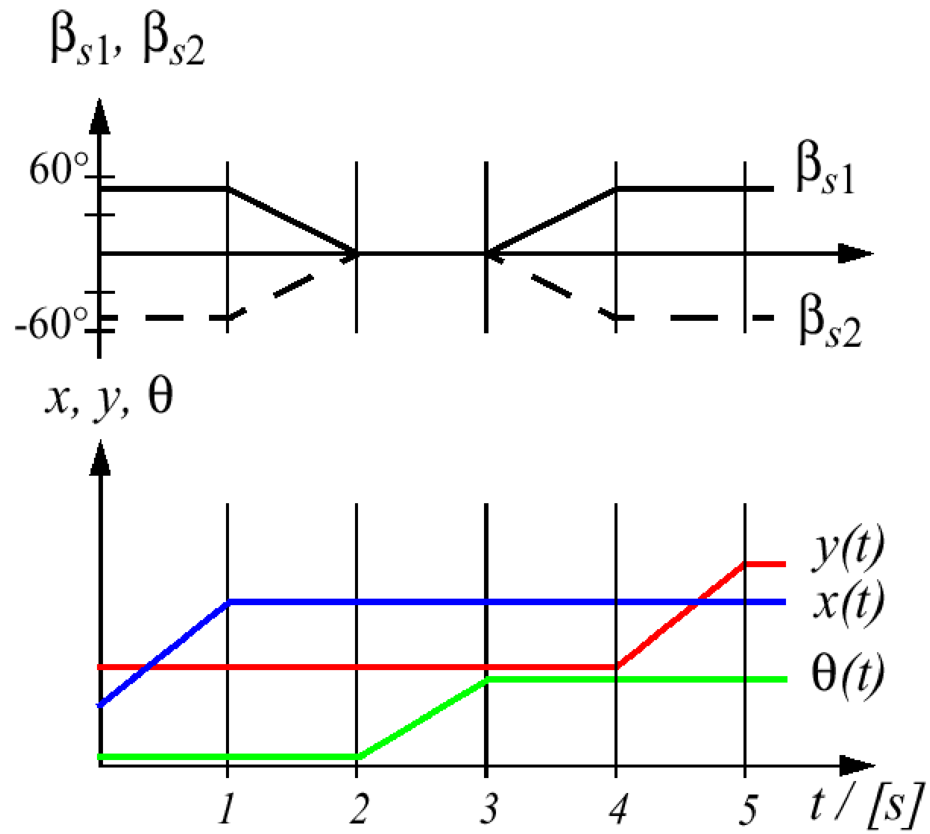
路径 / 轨迹的考虑：全向驱动





路径 / 轨迹的考虑： 双操纵


Y_I
X_I


β_{s1}, β_{s2}
60°
-60°
β_{s1}
β_{s2}
x, y, θ
$y(t)$
$x(t)$
$\theta(t)$
1
2
3
4
5
t / [s]

超出基本运动学部分

- 动力学约束（方程）：描述驱动力、加速度、速度以及位置的关系，其中涉及机器人的质量、转动惯量、与地面的摩擦阻力、向心力、哥氏力等，形式大致为（不考虑约束）：

$$M(q)\ddot{q}+V_m(q,\dot{q})+F(\dot{q})+G(q)+\tau_d=B(q)\tau$$

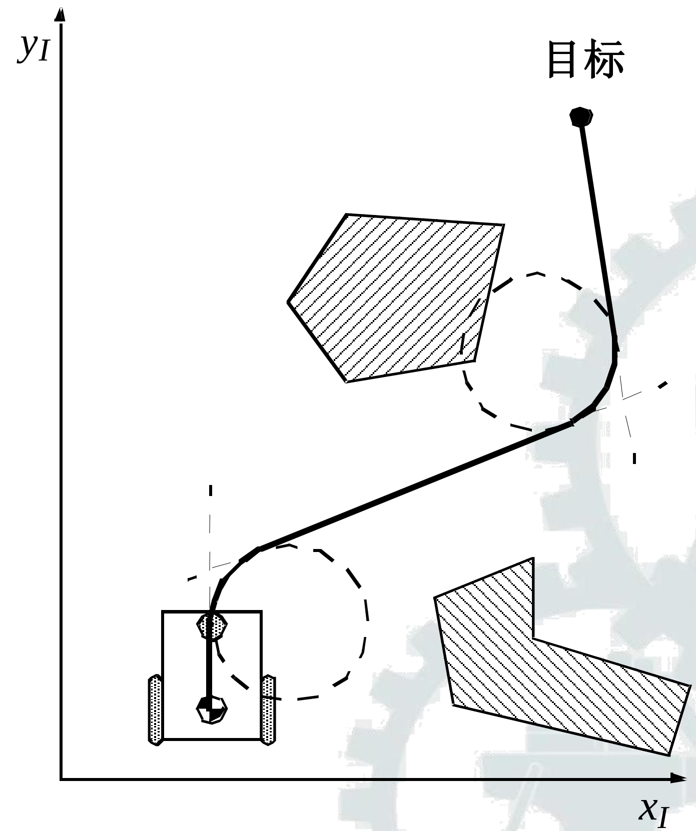
- 驱动的能力约束（驱动力、速度上界限制），驱动设计
- 能控性问题：在什么条件下，移动机器人能在有限的时间从初始姿态行走到目标姿态？

运动控制 (运动学控制)

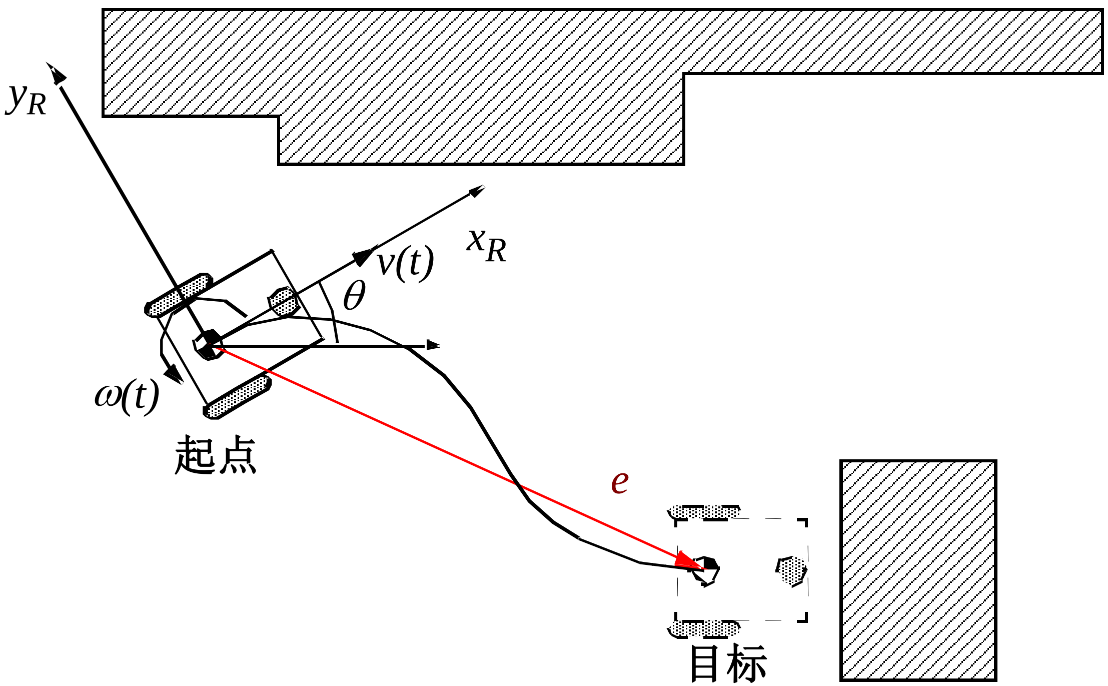
- 运动控制器的目标是跟踪一条轨线，该轨线由它的位置和/或速度时间函数表示。
- 运动控制不是显而易见的，因为移动机器人是非完整系统。
- 许多研究群体已经研究了这个问题，已经有了移动机器人运动控制的某些合适的解决方案。
- 大部分控制器都不考虑系统的动力学模型。

运动控制：开环控制

- 将轨迹（路径）分割成形状清晰的运动区段：
  - 直线和圆弧段
- 控制问题：
  - 预先计算一条基于直线和圆弧段的光滑轨线
- 缺点：
  - 预先计算可行的轨线根本不是容易的事
  - 机器人速度和加速度的限制与约束
  - 如果环境发生动态变化，机器人不会自动地适应或修正轨线
  - 得到的轨线通常不是光滑的



运动控制：反馈控制，问题陈述



- 寻找一个控制矩阵 ***K***：

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

其中 $k_{ij}=k(t,e)$

- 使得控制 $v(t)$ 和 $\omega(t)$

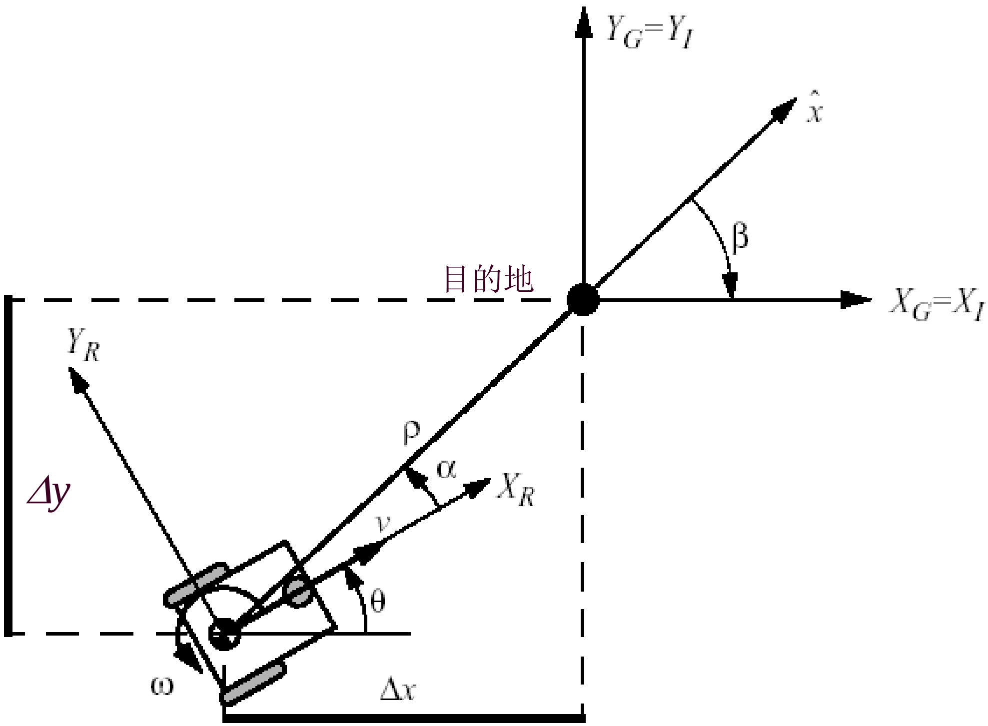
$$\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = K \cdot e = K \cdot {}^{R}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

- 驱动误差 ***e*** 到 **0**。

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$$

运动控制：

运动学位置控制



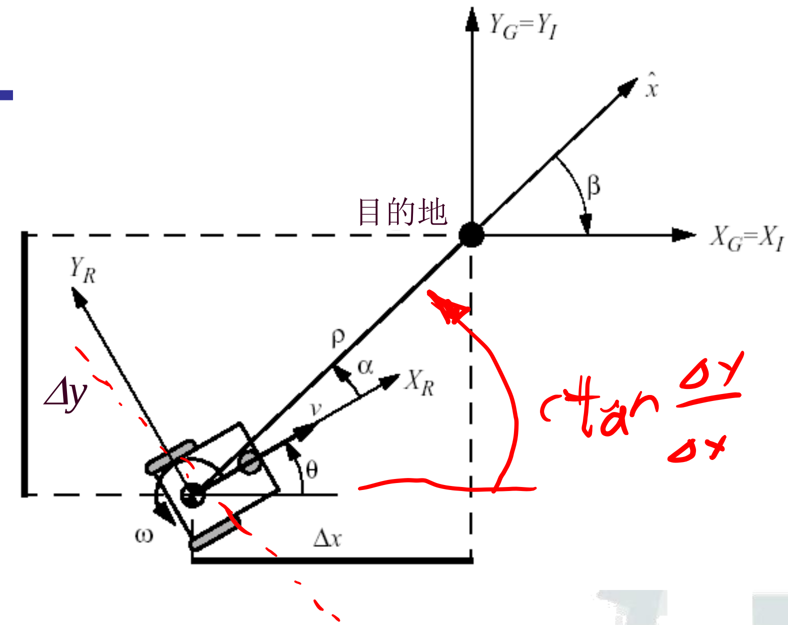
差动驱动移动机器人的运动学方程，在惯性坐标系$\{x_I, y_I, \theta\}$下的描述为：

$$
{}^{I}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}
$$

其中，$\dot{x}$，$\dot{y}$ 分别是沿惯性坐标系轴 x_I 和 y_I 的线速度。令 α 表示机器人参考系 x_R 轴和连接轮轴中心与目标点向量 $\dot{x}$ 之间的夹角。

运动学位置控制：坐标转换

经坐标转换到极坐标，目标点设为极坐标原点：



$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\alpha = -\theta + \mathrm{atan2}(\Delta y, \Delta x)$$

$$\beta = -\theta - \alpha$$

极坐标下的系统描述：

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & 0 \\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & -1 \\ -\frac{\sin\alpha}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

当$\alpha \in I_1 \quad I_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\frac{\sin\alpha}{\rho} & 1 \\ \frac{\sin\alpha}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

当$\alpha \in I_2 \quad I_2 = (-\pi, -\pi/2] \cup (\pi/2, \pi]$

运动学位置控制：控制律

- 可以证明，当 $v = k_\rho \rho$　　$\omega = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta$

  反馈控制系统

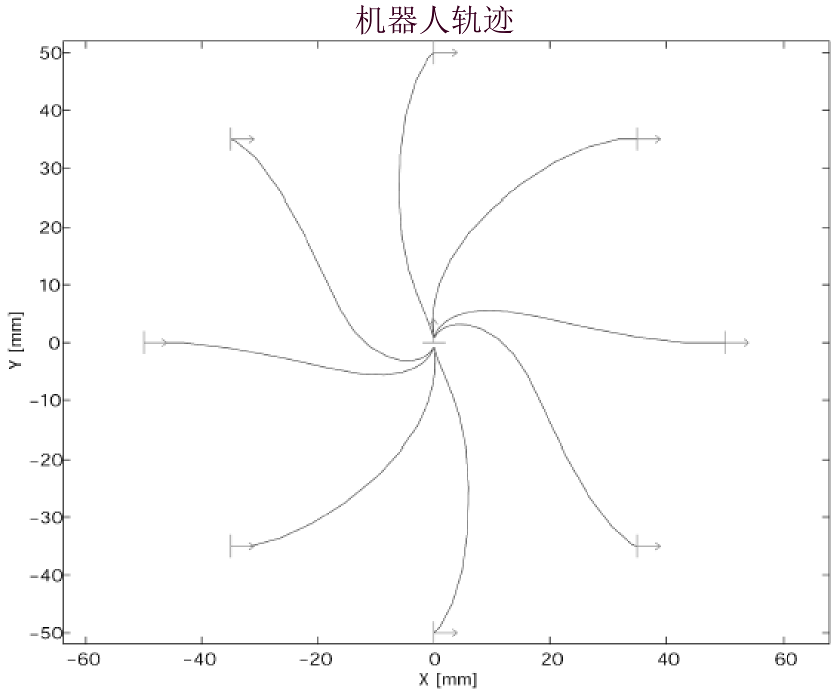
$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos\alpha \\ k_\rho \sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \\ -k_\rho \sin\alpha \end{bmatrix}$$

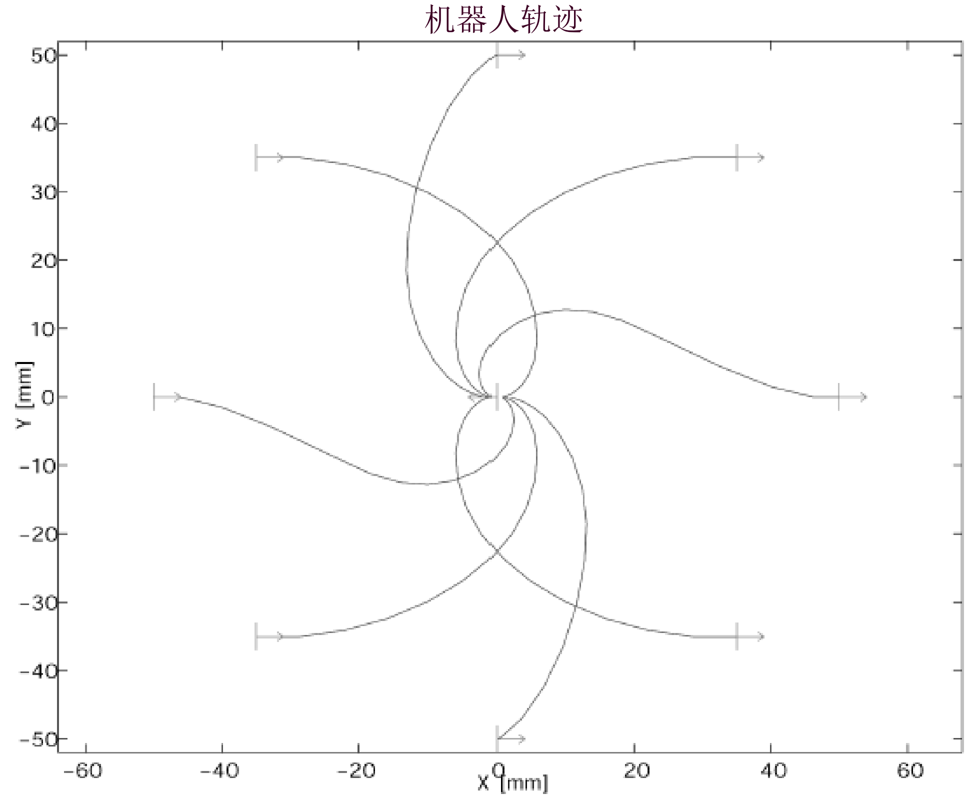
- 将驱动机器人到达

$$(\rho,\alpha,\beta) = (0,0,0)$$

- 控制信号 v 的符号恒定，
  - 在运动过程中，运动方向保持为正或保持为负
  - 总是以最自然的方式操作停车，无逆向运动（超调振荡）

运动学位置控制：最终路径





运动学位置控制：稳定性问题

◈ 进一步可以证明，闭环系统局部指数稳定，如果：

$$k_\rho > 0 \quad ; \quad k_\beta < 0 \quad ; \quad k_\alpha - k_\rho > 0$$

◈ 证明：
对于很小的 **x –> cosx = 1, sinx = x**。将反馈控制律代入系统，得

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho & 0 & 0 \\ 0 & -(k_\alpha - k_\rho) & -k_\beta \\ 0 & -k_\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -k_\rho & 0 & 0 \\ 0 & -(k_\alpha - k_\rho) & -k_\beta \\ 0 & -k_\rho & 0 \end{bmatrix}$$

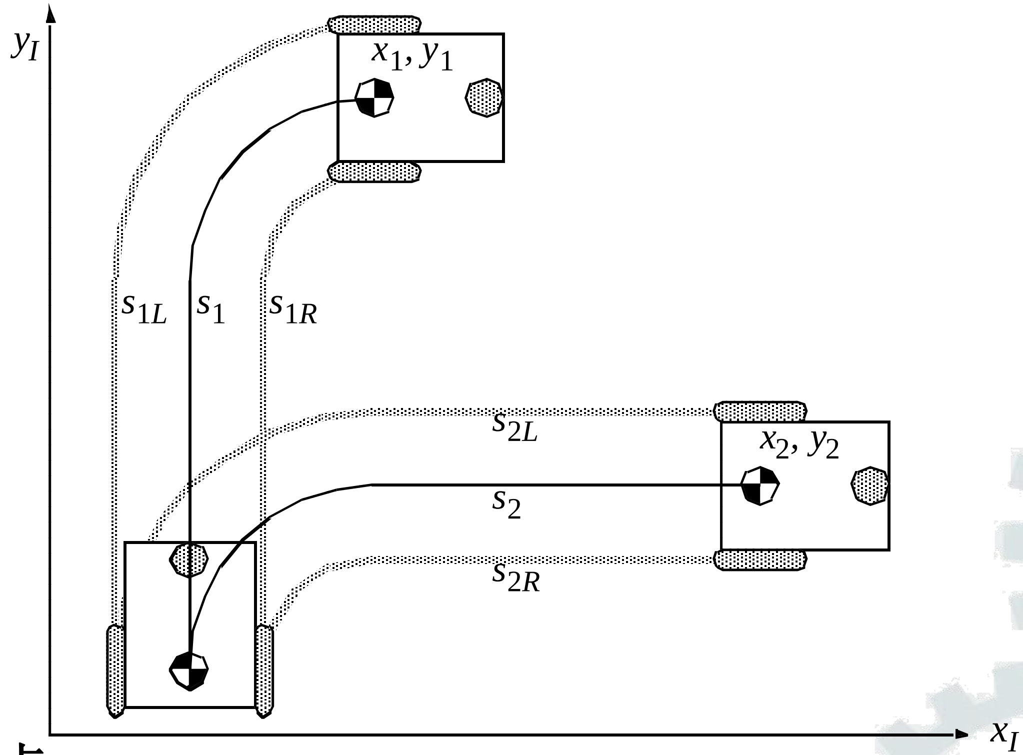
◈ *矩阵 **A** 的特征多项式为:* $(\lambda + k_\rho)(\lambda^2 + \lambda(k_\alpha - k_\rho) - k_\rho k_\beta)$

◈ 如果 $k_\rho > 0 \ ; \ k_\beta < 0 \ ; \ k_\alpha - k_\rho > 0$，所有根的实部为负。

移动机器人运动学

$s_1 = s_2$; $s_{1R} = s_{2R}$; $s_{1L} = s_{2L}$

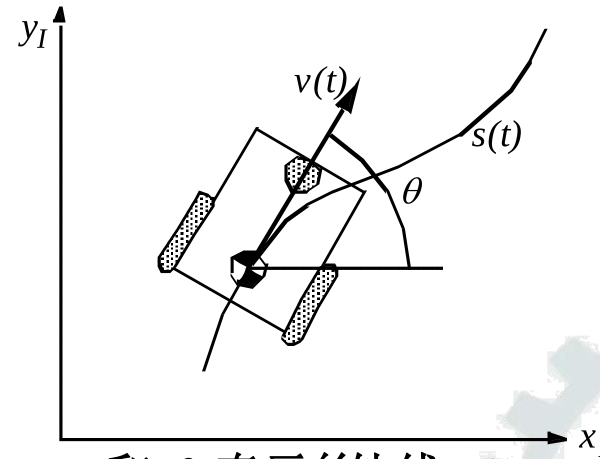
but: $x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$



- 对微分方程积分无法得到最终点。
- 各轮行走距离的量测对于计算机器人终点位置不充分，还必须知道用时间函数表示的运动完成过程。

非完整系统：数学解释

◈ 机器人沿轨线 **s(t)** *运动.*
在运动过程每一时刻，其速度 **v(t)** 是:



$$v(t)=\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\cos\theta+\frac{\partial y}{\partial t}\sin\theta$$

$$ds=dx\cos\theta+dy\sin\theta$$

◈ 称函数 **v(t)** 是可积分的（完整的），如果存在一条能够仅由 **x, y** 和 ***θ*** *表示的*轨线 **s(t)**：

$$s=s(x,y,\theta)$$

◈ 成立的条件：如果

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial x}\quad;\quad\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial\theta}=\frac{\partial^2 s}{\partial\theta\partial x}\quad;\quad\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial\theta}=\frac{\partial^2 s}{\partial\theta\partial y}}$$

可积函数的条件

◈ 其中 **s = s(x,y,θ)**，可得

$$ds=\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial y}dy+\frac{\partial s}{\partial\theta}d\theta$$

非完整系统：移动机器人例

◈ 对于移动机器人，有 $ds = dx\cos\theta + dy\sin\theta$

◈ 将上式与下式比较： $ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy + \frac{\partial s}{\partial \theta}d\theta$

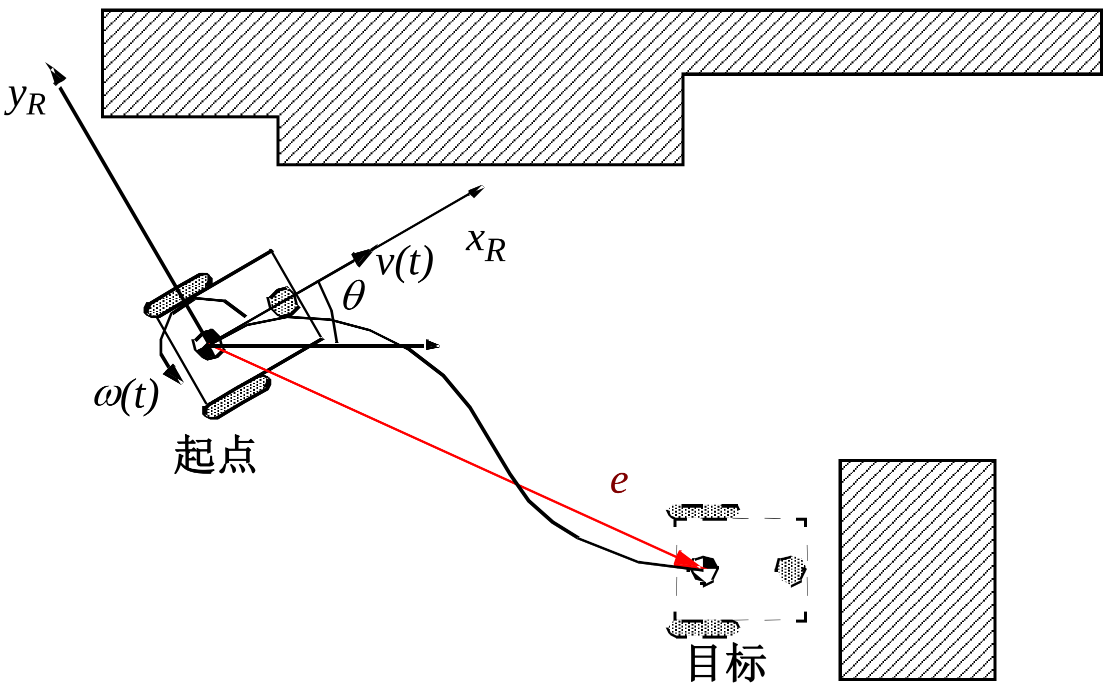
◈ 发现 $\frac{\partial s}{\partial x} = \cos\theta$ ； $\frac{\partial s}{\partial y} = \sin\theta$ ； $\frac{\partial s}{\partial \theta} = 0$

◈ 可积分（完整）函数的条件： $\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y\partial x}$ ； $\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial \theta} = \frac{\partial^2 s}{\partial \theta\partial x}$ ； $\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial \theta} = \frac{\partial^2 s}{\partial \theta\partial y}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\cos\theta = -\sin\theta \;;\; \frac{\partial^2 s}{\partial \theta\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta}0 = 0}$$

◈ **第 2 (-sinθ=0) 和第 3 (cosθ=0) 等式不成立!**

非线性单点移动机器人线性化



$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \;\; x_2 = y \;\; x_3 = \theta \\ y_1 = x_1 \; y_2 = x_2 \; y_3 = x_3 \\ u_1 = v \;\; u_2 = \omega \\ (x_0, u_0) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u \\ y = \mathrm{C}x \end{cases}$$

非线性单点移动机器人线性化

$$f(x, y, \theta) = \begin{bmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

非线性单点移动机器人线性化

$$f(x,y,\theta)=\begin{bmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial \omega} \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非线性单点移动机器人线性化

$$h(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非线性单点移动机器人线性化

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \dot{x}_2=0$$

Systems Engineering Institute,
Xi'an Jiaotong University,
Xi'an ShaanXi,
710049, P.R.China
Phone: 86-29-82667771

End